

평면 벡터 단원을 구성하는 3개의 단원은

1. 벡터의 연산
2. 평면벡터의 성분과 내적
3. 평면 운동입니다.

이 문제는

1. 벡터의 연산, 2. 평면벡터의 성분과 내적 단원의 개념을 묻는 문제입니다.

1. 벡터의 연산 단원에서는

[벡터의 뜻]

-시점, 종점, 벡터의 크기($|\vec{AB}|$), 영벡터 등

[벡터의 덧셈과 뺄셈]

-평행사변형과 삼각형을 이용하여 벡터의 덧셈과 뺄셈, 연산법칙 등

[벡터의 실수배]

-벡터의 평행(\vec{a}, \vec{b} 가 평행하면 $\vec{b} = k\vec{a}$), 실수배에 대한 연산법칙 등을 배우며

2. 평면벡터의 성분과 내적 단원에서는

[평면벡터의 성분]

-위치벡터, 평면벡터의 성분 등

[평면벡터의 내적]

내적의 뜻, 두 벡터가 이루는 각의 크기 등

[직선과 원의 방정식]

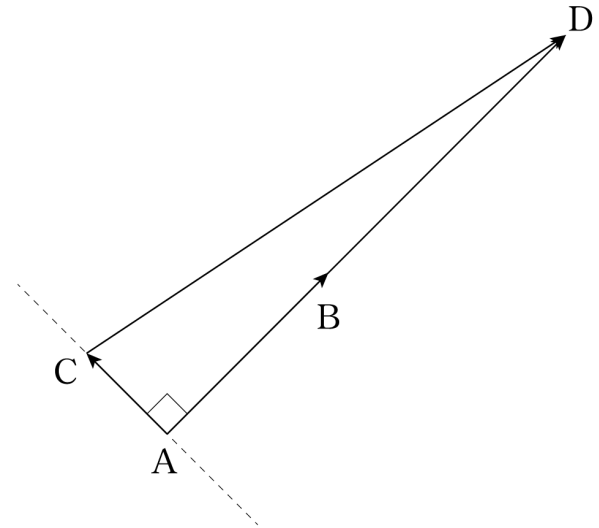
벡터를 통해 직선과 원을 나타내는 방법을 배웁니다.

위 단원의 모든 소단원을 포함하고 있는 문제이므로 문제를 이해하는데 까지 오랜 시간이 걸렸다면 꼭 복습하시길 바랍니다.

벡터 \vec{a} 를 원점에 대한 위치벡터로 나타내면 $(4, 3)$ 이고, 벡터 \vec{b} 를 원점에 대한 위치벡터로 나타내면 $(-2, -1)$ 이므로 두 벡터 \vec{AB}, \vec{CD} 는 각각 $\vec{AB} = (2, 2), \vec{CD} = (6, 4)$ 이다.

네 점 A, B, C, D에 대하여 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$ ($\angle BAC = \frac{\pi}{2}$)이므로 두

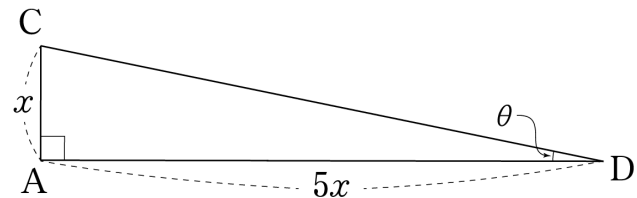
벡터 \vec{AB} 와 \vec{AC} 는 수직이고, 어떤 실수 k 에 대하여 $\vec{AD} = k\vec{AB}$ 이므로 두 벡터 \vec{AD}, \vec{AB} 는 서로 평행하다. 이를 통해 네 점에 대한 위치를 평면에 나타내 보면 다음과 같다.



이 때, $|\vec{BD}|^2$ 를 구하기 위하여 직각삼각형 CAD를 이용하자. \vec{CD} 의 크기는 $\sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$ 이고, 벡터 \vec{AB} 에 평행한 직선의 기울기는 $\frac{1}{1} = 1$, 벡터 \vec{CD} 에 평행한 직선의 기울기는 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 이므로

$$\angle CDA = \theta \text{라 할 때, } \tan \theta = \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{5} \text{이다. 그러므로 } \vec{AC} = x \text{라}$$

하면, $\vec{CD} = 5x$ 이다. - 덧셈정리를 이용하지 않고, 평면벡터의 내적을 통해 $\cos \theta$ 의 값을 구할 수도 있다.



\vec{CD} 의 크기가 $\sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$ 이므로 피타고라스 정리를 이용하면 $\vec{CD}^2 = \vec{AC}^2 + \vec{AD}^2 = x^2 + (5x)^2 = 26x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ 이다.

점 A의 좌표를 (p, q) 라 할 때, 점 B의 좌표는 $(p+2, q+2)$, C의 좌표는 $(p-1, q+1)$ 이고, $\vec{CD} = (6, 4)$ 이므로 D의 좌표는 $(p+5, q+5)$ 이다. 즉, $\vec{BD} = (3, 3)$ 이다.

$$\therefore |\vec{BD}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

삼각형 CBD에서 밑변의 길이가 \vec{BD} , 높이가 \vec{AC} 이므로 답은

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 3 \text{이다.}$$

점 A의 좌표를 원점으로 설정하고 계산해도 같은 답이 나온다.

$\Rightarrow A(=O)$ 라 하면 C의 좌표를 $(-a, a)$ 라 할 수 있다.

$\vec{CD} = (6, 4)$ 이므로 D의 좌표는 $(6-a, 4+a)$ 이고, 이 점이 직선

$y = x$ 위에 있으므로 $6-a = 4+a \Leftrightarrow a = 1$ 이다. 이하 생략