Final

—②—

Ch① 함수의 극한과 연속

TH①. 교점의 개수의 연속과 불연속 (추론)

출제 : 11번,12번,13번,14번

[Prediction] 30%

무난하게 상수함수와의 교점의 개수를 나타내는 함수의 연속과 불연속을 출제할 확률이 높다. 항상 처음에 상수함수를 극값에 옮겨서 그래프를 그려내는 연습을 하자.

2024년 7월 교육청모의고사

2025 Trend

1. 두 정수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2ax+\dfrac{a^2}{4}+b^2 & (x \le 0) \\ x^3-3x^2+5 & (x>0) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수가 2가 되도록 하는 두 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

2024년 수능

2025 Trend

2. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x \le 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k)+\lim_{t \to k-} g(t)+\lim_{t \to k+} g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점]

① 51　② 52　③ 53　④ 54　⑤ 55

3. 실수 t와 함수

$$f(x)=\begin{cases} x-3 & (x<-1) \\ (x+1)(x-3) & (x \geq -1) \end{cases}$$

에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 n이라 할 때, 함수 $g(t)$를 다음과 같이 정의한다.

> $n=1$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 해가 $x=\alpha$이면 $g(t)=\alpha$이다. $n\geq 2$일 때, $g(t)$는 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 모든 실근의 합이다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $\lim_{t \to 0-} g(t)=2$

ㄴ. $\lim_{t \to 5} \dfrac{g(-t)+2}{g(t)-4}=6$

ㄷ. 함수 $(|t+2|-2)g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-2x-1}{x} & (x<0) \\ x^2-8x+a & (x \geq 0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$\lim_{t\to k-} g(t)-\lim_{t\to k+} g(t)>2$$

를 만족시키는 상수 k가 존재하도록 하는 모든 양수 a의 값의 합을 구하시오.

2024년 수능완성

2025 Trend

5. 실수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+k & (x<0) \\ -x^2+4x+k & (x \geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보기 |

ㄱ. 함수 $f(x)$가 $x \geq a$에서 감소할 때, 양수 a의 최솟값은 2이다.

ㄴ. $k=-2$일 때, $g(1)=6$

ㄷ. $-4<k<0$인 모든 실수 k와 실수 b에 대하여 $\lim_{t \to b-} g(t) > \lim_{t \to b+} g(t)$를 만족시키는 서로 다른 모든 $g(b)$의 값의 합은 8이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

TH②. 단순 계산

출제 : 10번,11번

[Prediction] 10%

단순한 계산 문제를 출제할 수도 있다.

2024년 5월 교육청모의고사

2025 Trend

6. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=\left(-\frac{1}{2}x+3\right)g(x)-x^3+2x^2$$

을 만족시킨다. 상수 k $(k \neq 0)$에 대하여

$$\lim_{x \to 2}\frac{g(x-1)}{f(x)-g(x)} \times \lim_{x \to \infty}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}=k$$ 일 때,

k의 값을 구하시오.

2024년 수능완성

연계 가능

7. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)+g(x)-2}{x} = 5$

(나) 모든 실수 x에 대하여

$\{f(x)+x\}\{g(x)-2\} = x^2\{f(x)+9\}$ 이다.

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)g(x)\{g(x)-2\}}{x^2}$ 의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

TH③. 연속성

출제 : 10번,11번

[Prediction] 10%

단순한 연속성 문제를 출제할 수도 있다.

2025학년도 경찰대학교

8. 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{g(x)} & (x \neq 2) \\ 3 & (x = 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to \infty} h(x) = 3$이고 $\lim_{x \to 1} \frac{1}{h(x)} = \infty$ 이다.

(나) 방정식 $h(x) = 12$가 오직 하나의 실근을 가진다

$h(0)$의 값은?

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$
④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

9. 함수

$$f(x)=\begin{cases}-2 & (x<-1)\\ x^2+ax+b & (-1\le x\le 2)\\ 2 & (x>2)\end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 실수 a, b $(a<b)$에 대하여 $9ab$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 함수 $f(x)$의 최솟값이 -2보다 작다.

10. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 세 실수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)=\dfrac{x}{f(x^2+4)}$는 $x=a$에서 불연속이다.
(나) 함수 $h(x)=\dfrac{f(x-4)}{f(x^2)}$는 $x=b$, $x=c$ $(b<c)$에서만 불연속이다.

$\lim\limits_{x\to b}h(x)$의 값이 존재할 때, $f(c)\times\lim\limits_{x\to b}h(x)$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

1. [정답] ③

[해설]

$x>0$에서 $f(x)=x^3-3x^2+5$이므로

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=5$이고 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이다.

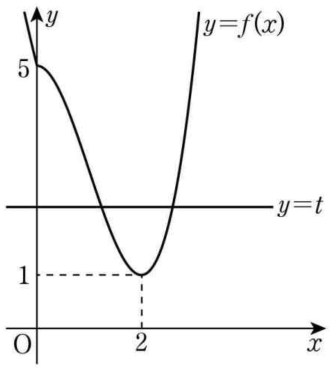
$f'(2)=0$이고 $x=2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$의 극솟값은 $f(2)=1$이다.

$x\leq 0$에서 $f(x)=x^2-2ax+\dfrac{a^2}{4}+b^2=(x-a)^2-\dfrac{3}{4}a^2+b^2$이고

$f(0)=\dfrac{a^2}{4}+b^2$

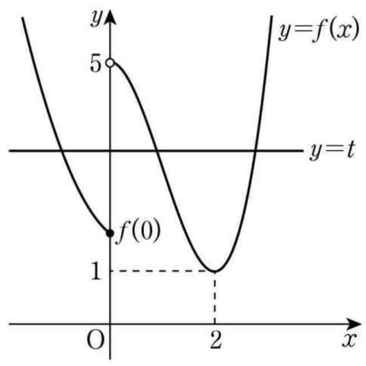
(i) $a\geq 0$인 경우

① $f(0)=5$인 경우



함수 $g(t)$는 $t=1$에서만 불연속이므로 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수는 1이다.

② $f(0)\neq 5$인 경우



함수 $g(t)$는 $t=1$, $t=5$, $t=f(0)$에서 불연속이다. 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수가 2가 되려면

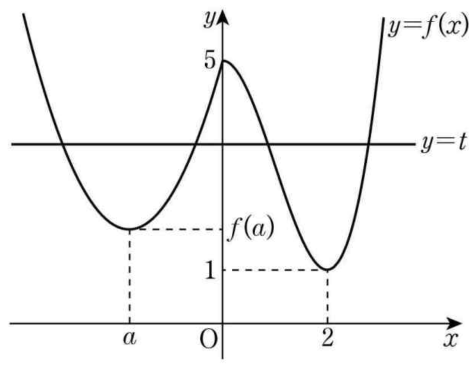
$f(0)=\dfrac{a^2}{4}+b^2=1$이다.

$\dfrac{a^2}{4}=0$, $b^2=1$ 또는 $\dfrac{a^2}{4}=1$, $b^2=0$

을 만족시키는 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(2, 0)$

(ii) $a<0$인 경우

① $f(0)=5$인 경우

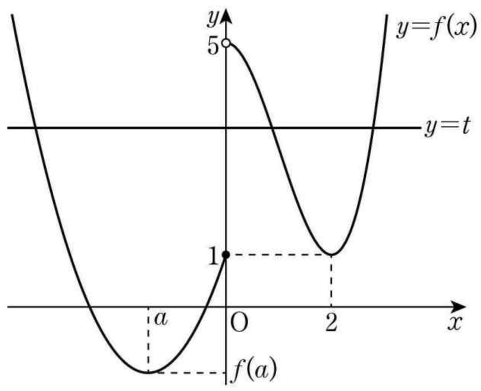


함수 $g(t)$는 $t=1$, $t=5$, $t=f(a)$에서 불연속이다. 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수가 2가 되려면

$f(a)=-\dfrac{3}{4}a^2+b^2=1$, $f(0)=\dfrac{a^2}{4}+b^2=5$이다.

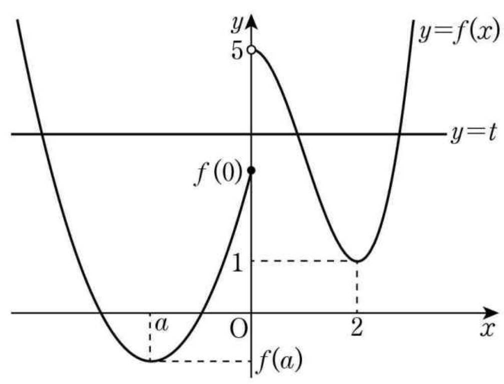
$a^2=4$, $b^2=4$를 만족시키는 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(-2, 2)$, $(-2, -2)$

② $f(0)=1$인 경우



$f(a)<1<5$이고 함수 $g(t)$는 $t=f(a)$, $t=1$, $t=5$에서 불연속이므로 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수가 3이다.

③ $f(0)\neq 1$이고 $f(0)\neq 5$인 경우



$g(t)$는 $t=1$, $t=5$, $t=f(0)$에서 불연속이므로 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수는 3 이상이다.

(i), (ii)에서 구하는 두 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(2, 0)$, $(-2, 2)$, $(-2, -2)$로 5

2. ①

a, b는 자연수이고,

함수 $f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x\leq 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2) \end{cases}$

이다.

함수 $h(x)=2x^3-6x+1$이라 하면

$h'(x)=6x^2-6$

방정식 $h'(x)=0$에서 $x=\pm 1$

$x\leq 2$에서 함수 $y=h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5

이다. 함수 $y=a(x-2)(x-b)+9$의 그래프는 점 $(2,\ 9)$, 점 $(b,\ 9)$를 지난다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 $g(t)$이고, $g(k)+\lim\limits_{t\to k-}g(t)+\lim\limits_{t\to k+}g(t)=9$인 실수 k의 개수는 1이다.

(ⅰ) $b=1$일 때

함수 $y=a(x-2)(x-b)+9$에서

$$y=a(x-2)(x-1)+9$$

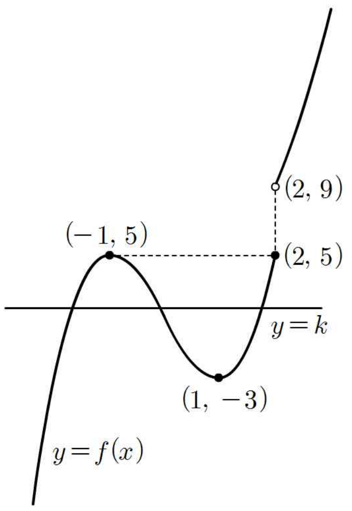
이다. 함수 $y=a(x-2)(x-1)+9$의 그래프는 두 점 $(1,\ 9)$, $(2,\ 9)$를 지난다.

$-3<k<5$인 모든 실수 k에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 3이다.

따라서 $-3<k<5$인 모든 실수 k에 대하여

$$g(k)=\lim_{t\to k-}g(t)=\lim_{t\to k+}g(t)=3$$

이다. 따라서 $g(k)+\lim\limits_{t\to k-}g(t)+\lim\limits_{t\to k+}g(t)=9$인 실수 k의 개수는 무수히 많다.



(ⅱ) $b=2$일 때

함수 $y=a(x-2)(x-b)+9$에서

$$y=a(x-2)^2+9$$

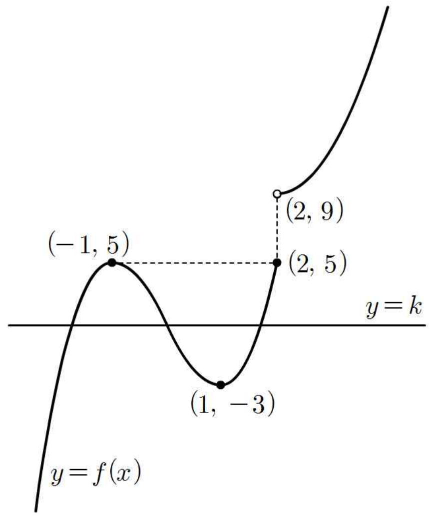
이다. 함수 $y=a(x-2)^2+9$의 그래프의 꼭짓점은 $(2,\ 9)$이다.

$-3<k<5$인 모든 실수 k에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 3이다.

따라서 $-3<k<5$인 모든 실수 k에 대하여

$$g(k)=\lim_{t\to k-}g(t)=\lim_{t\to k+}g(t)=3$$

이다. 따라서 $g(k)+\lim\limits_{t\to k-}g(t)+\lim\limits_{t\to k+}g(t)=9$인 실수 k의 개수는 무수히 많다.



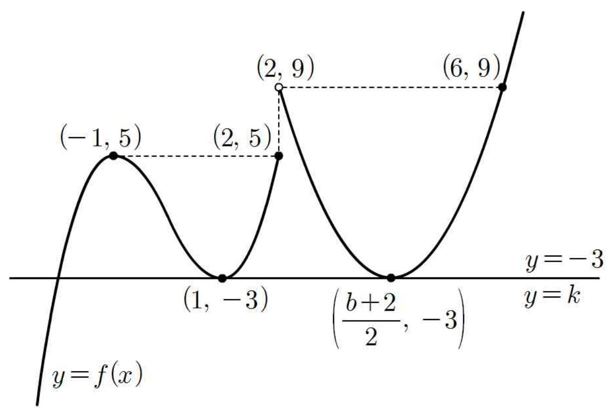
(ⅲ) $b\geq\ 3$일 때

함수 $y=a(x-2)(x-b)+9$의 그래프의 꼭짓점은 $\left(\dfrac{b+2}{2},\ f\left(\dfrac{b+2}{2}\right)\right)$이다.

$f\left(\dfrac{b+2}{2}\right)=-3$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수는 $k<-3$에서 1, $k=-3$에서 3이고, $-3<k<5$에서 5이므로

$$g(-3)=3,\quad \lim_{t\to -3-}g(t)=1,\quad \lim_{t\to -3+}g(t)=5$$

이다.



$f\left(\dfrac{b+2}{2}\right)\neq\ -3$인 자연수 b에 대하여 같은 방법으로 하면 $g(k)+\lim\limits_{t\to k-}g(t)+\lim\limits_{t\to k+}g(t)=9$인 실수 k의 개수가 1인 경우는 존재하지 않는다.

이상에서 $g(k)+\lim\limits_{t\to k-}g(t)+\lim\limits_{t\to k+}g(t)=9$인 k의 개수가 1이면

$$b\geq\ 3,\ f\left(\frac{b+2}{2}\right)=-3$$

이다.

$f\left(\dfrac{b+2}{2}\right)=-3$에서

$$a\left(\frac{b}{2}-1\right)\left(1-\frac{b}{2}\right)+9=-3,\qquad a\left(\frac{b}{2}-1\right)^2=12$$

$\therefore\ \ a(b-2)^2=48$

48을 두 자연수 m, n에 대하여 $m\times n^2$꼴로 나타내면

3×4^2 또는 12×2^2 또는 48×1^2

$b\geq\ 3$이므로 $b-2\geq\ 1$이다.

(1) $48=3\times4^2$일 때 $a=3$, $b=6$

(2) $48=12\times2^2$일 때 $a=12$, $b=4$

(3) $48=48\times1^2$일 때 $a=48$, $b=3$

이상에서 $a+b$의 최댓값은 $a=48$, $b=3$일 때 51이다.

3. 정답 ④

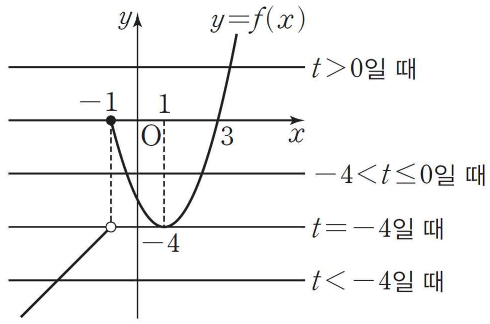
풀이

$x<-1$일 때, $f(x)=x-3$이고,

$x\geq -1$일 때,

$$
\begin{aligned}
f(x)&=(x+1)(x-3)\\
&=x^2-2x-3\\
&=(x-1)^2-4
\end{aligned}
$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(ⅰ) $t<-4$일 때,

방정식 $f(x)=t$의 실근은 두 직선 $y=x-3$ $(x<-1)$과 $y=t$가 만나는 점의 x좌표와 같다.

즉, $x-3=t$에서 $x=t+3$이므로

$g(t)=t+3$

(ⅱ) $t=-4$일 때,

방정식 $f(x)=-4$의 실근은 곡선 $y=x^2-2x-3$ $(x\geq -1)$과 직선 $y=-4$가 만나는 점의 x좌표와 같다.

즉, $x^2-2x-3=-4$, $(x-1)^2=0$에서 $x=1$이므로 $g(t)=1$

(ⅲ) $-4<t\leq 0$일 때

방정식 $f(x)=t$의 실근은 곡선 $y=x^2-2x-3$ $(x\geq -1)$과 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표와 같다.

이차방정식 $x^2-2x-3=t$, 즉 $x^2-2x-3-t=0$의 두 실근을 β, γ $(\beta<\gamma)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\beta+\gamma=2$이므로

$g(t)=2$

(ⅳ) $t>0$일 때,

방정식 $f(x)=t$의 실근은 곡선 $y=x^2-2x-3$ $(x\geq -1)$과 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표와 같다.

이차방정식 $x^2-2x-3-t=0$의 실근은

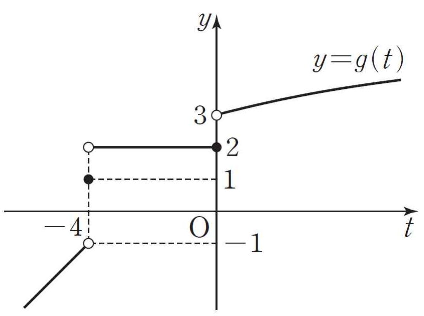
$x=1-\sqrt{t+4}<-1$, $x=1+\sqrt{t+4}>3$이므로

$g(t)=1+\sqrt{t+4}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의하여

$$
g(t)=\begin{cases} t+3 & (t<-4)\\ 1 & (t=-4)\\ 2 & (-4<t\leq 0)\\ 1+\sqrt{t+4} & (t>0)\end{cases}
$$

이므로 함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $\lim\limits_{t\to 0-}g(t)=\lim\limits_{t\to 0-}2=2$ (참)

ㄴ. $t\to 5$일 때 $-t\to -5$이므로

$g(-t)=-t+3$

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 5}\frac{g(-t)+2}{g(t)-4}&=\lim_{t\to 5}\frac{(-t+3)+2}{(1+\sqrt{t+4})-4}\\
&=\lim_{t\to 5}\frac{-(t-5)}{\sqrt{t+4}-3}\\
&=\lim_{t\to 5}\frac{-(t-5)(\sqrt{t+4}+3)}{(\sqrt{t+4}-3)(\sqrt{t+4}+3)}\\
&=\lim_{t\to 5}\frac{-(t-5)(\sqrt{t+4}+3)}{t-5}\\
&=-\lim_{t\to 5}(\sqrt{t+4}+3)\\
&=-6 \text{ (거짓)}
\end{aligned}
$$

ㄷ. 함수 $h(t)$를 $h(t)=(|t+2|-2)g(t)$라 하자.

함수 $y=|t+2|-2$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, 함수 $y=g(t)$는 $t\neq -4$, $t\neq 0$인 모든 실수에서 연속이므로 함수 $h(t)$는 $t\neq -4$, $t\neq 0$인 모든 실수에서 연속이다.

(ⅰ) $\lim\limits_{t\to -4-}h(t)=\lim\limits_{t\to -4-}(|t+2|-2)g(t)$

$=0\times(-1)=0$,

$\lim\limits_{t\to -4+}h(t)=\lim\limits_{t\to -4+}(|t+2|-2)g(t)$

$=0\times 2=0$,

$h(-4)=0\times 1=0$

이므로

$\lim\limits_{t\to -4-}h(t)=\lim\limits_{t\to -4+}h(t)=h(-4)$

따라서 함수 $h(t)$는 $t=-4$에서 연속이다.

(ⅱ) $\lim\limits_{t\to 0-}h(t)=\lim\limits_{t\to 0-}(|t+2|-2)g(t)$

$=0\times 2=0$,

$\lim\limits_{t\to 0+}h(t)=\lim\limits_{t\to 0+}(|t+2|-2)g(t)$

$=0\times 3=0$,

$h(0)=0\times 2=0$

이므로

$\lim\limits_{t\to 0-}h(t)=\lim\limits_{t\to 0+}h(t)=h(0)$

따라서 함수 $h(t)$는 $t=0$에서 연속이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 함수 $h(t)=(|t+2|-2)g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

4. 정답 22

$x<0$일 때, $f(x)=\dfrac{-2x-1}{x}=-\dfrac{1}{x}-2$이므로

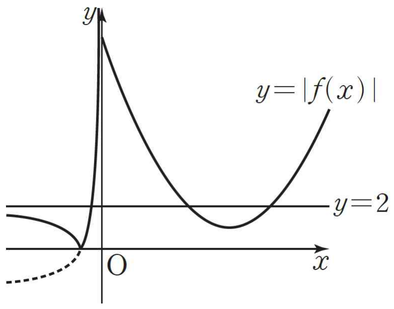
$x<0$에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=2$이다.

$x\geq 0$일 때, $f(x)=x^3-8x+a=(x-4)^2+a-16$이므로

양수 a의 범위를 나누어 함수 $g(t)$를 생각할 수 있다.

(ⅰ) $a-16\geq 0$, 즉 $a\geq 16$인 경우

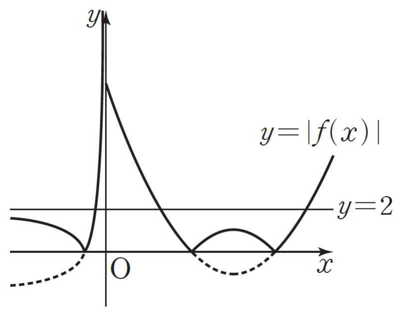
함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



그러므로 $\lim_{t \to k-} g(t) - \lim_{t \to k+} g(g) > 2$를 만족시키는 상수 k가 존재하지 않는다.

(ii) $-2 < a-16 < 0$, 즉 $14 < a < 16$인 경우

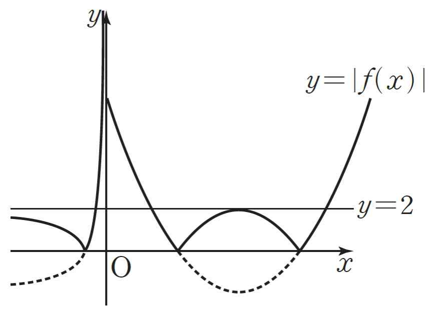
함수 $y = |f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



그러므로 $\lim_{t \to k-} g(t) - \lim_{t \to k+} g(t) > 2$를 만족시키는 상수 k가 존재하지 않는다.

(iii) $a-16 = -2$, 즉 $a = 14$인 경우

함수 $y = |f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.

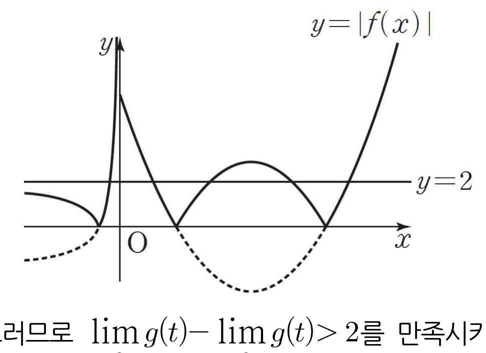


이때 $\lim_{t \to 2-} g(t) = 6$, $\lim_{t \to 2+} g(t) = 3$이므로

$\lim_{t \to k-} g(t) - \lim_{t \to k+} g(t) > 2$를 만족시키는 상수 $k = 2$가 존재한다.

(iv) $-8 < a-16 < -2$, 즉 $8 < a < 14$인 경우

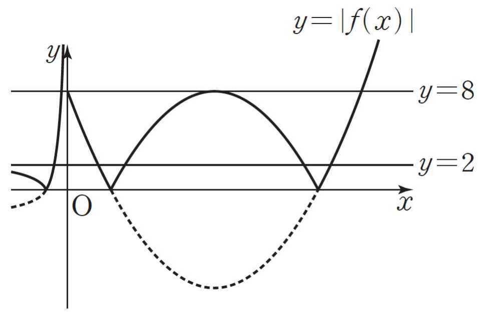
함수 $y = |f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



그러므로 $\lim_{t \to k-} g(t) - \lim_{t \to k+} g(t) > 2$를 만족시키는 상수 k가 존재하지 않는다.

(v) $a-16 = -8$, 즉 $a = 8$인 경우

함수 $y = |f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.

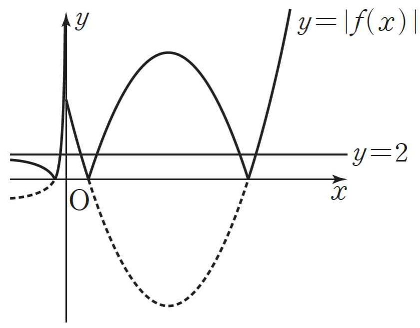


이때, $\lim_{t \to 8-} g(t) = 5$, $\lim_{t \to 8+} g(t) = 2$이므로

$\lim_{t \to k-} g(t) - \lim_{t \to k+} g(t) > 2$를 만족시키는 상수 $k = 8$이 존재한다.

(vi) $-16 < a-16 < -8$, 즉 $0 < a < 8$인 경우

함수 $y = |f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



그러므로 $\lim_{t \to k-} g(t) - \lim_{t \to k+} g(t) > 2$를 만족시키는 상수 k가 존재하지 않는다.

(i)~(vi)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 상수 k가 존재하도록 하는 모든 양수 a의 값은 8, 14이고 그 합은 22이다.

5. **정답** ②

ㄱ. $x \geq 0$일 때, $f(x) = -x^2 + 4x + k = -(x-2)^2 + k + 4$

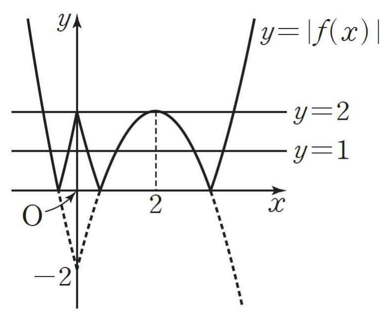
함수 $f(x)$는 $x \geq 2$에서 감소하므로 $a \geq 2$

따라서 양수 a의 최솟값은 2이다. (참)

ㄴ. $k = -2$일 때

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 2 & (x < 0) \\ -x^2 + 4x - 2 & (x \geq 0) \end{cases}$ 이고 $f(0) = -2$, $f(2) = 2$

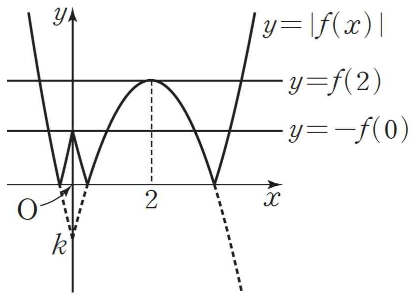
이므로 함수 $y = |f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y = |f(x)|$의 그래프와 직선 $y = 1$이 만나는 점의 개수가 6이므로 $g(1) = 6$ (참)

ㄷ. $-4 < k < 0$일 때, k의 값의 범위에 따라 함수 $y = |f(x)|$의 그래프를 그리고, 함수 $g(t)$와 $g(b)$의 값을 구해 보자.

(i) $-2 < k < 0$일 때



함수 $g(t)$는 다음과 같다.

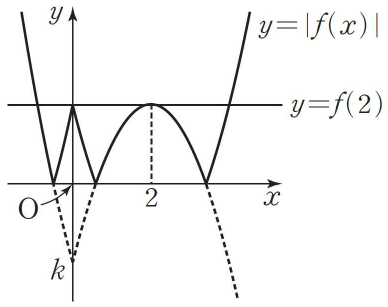
$$g(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 3 & (t=0)\\ 6 & (0<t<-f(0))\\ 5 & (t=-f(0))\\ 4 & (-f(0)<t<f(2))\\ 3 & (t=f(2))\\ 2 & (t>f(2))\end{cases}$$

이때 $\lim\limits_{t\to b-}g(t)>\lim\limits_{t\to b+}g(t)$를 만족시키는 b의 값은

$-f(0)$, $f(2)$ 이므로

$g(b)=g(-f(0))=5$ 또는 $g(b)=g(f(2))=3$

(ii) $k=-2$일 때



따라서 함수 $g(t)$는 다음과 같다.

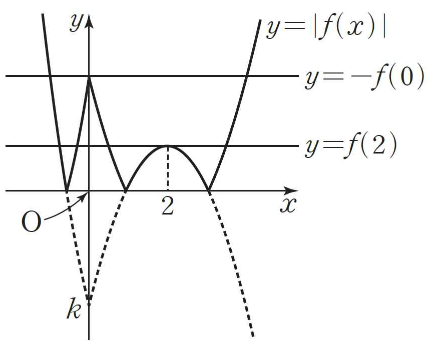
$$g(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 3 & (t=0)\\ 6 & (0<t<f(2))\\ 4 & (t=f(2))\\ 2 & (t>f(2))\end{cases}$$

이때 $\lim\limits_{t\to b-}g(t)>\lim\limits_{t\to b+}g(t)$를 만족시키는 b의 값은

$f(2)$ 이므로

$g(b)=g(f(2))=4$

(iii) $-4<k<-2$일 때



따라서 함수 $g(t)$는 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 3 & (t=0)\\ 6 & (0<t<f(2))\\ 5 & (t=f(2))\\ 4 & (f(2)<t<-f(0))\\ 3 & (t=-f(0))\\ 2 & (t>-f(0))\end{cases}$$

이때 $\lim\limits_{t\to b-}g(t)>\lim\limits_{t\to b+}g(t)$를 만족시키는 b의 값은

$-f(0)$, $f(2)$ 이므로

$g(b)=g(-f(0))=3$ 또는 $g(b)=g(f(2))=5$

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 $g(b)$의 값의 합은 $3+4+5=12$

(거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

6. 정답 25

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$가 극한값을 가지므로 $f(x)$가 n차식이면 $g(x)$는

$2n$차식, 조건식의 양변의 최고차항이 같아야 하므로 $f(x)=ax^n$,

$g(x)=bx^{2n}$이라할 때, 좌변은 ax^{n+1}, $-\dfrac{1}{2}\times bx^{2n+1}$이 같아야

하지만, $n+1\neq 2n+1$이므로 $-\dfrac{b}{2}x^{2n+1}-x^3=0$이 되어야 우변은

최고차항이 2차 항이 되고 좌변과 차수가 같아질 수 있다.

$f(x)=ax+b$라 할 때,

$ax^2+bx=\left(-\dfrac{1}{2}x+3\right)g(x)-x^3+2x^2$,

$\left(-\dfrac{1}{2}x+3\right)g(x)=x^3+(a-2)x^2+bx$에서

우변의 상수항이 0이고 좌변의 3차 항 계수를 맞춰 $g(x)$를

추론하면

$g(x)=-2x^2+cx$라 할 수 있다.

$$\left(-\frac{1}{2}x+3\right)(-2x^2+cx)=x^3+(a-2)x^2+bx$$

$$x^3+\left(-6-\frac{c}{2}\right)x^2+3cx=x^3+(a-2)x^2+bx$$

이차항을 비교하면 $-6-\dfrac{c}{2}=a-2$, $a=-4-\dfrac{c}{2}$

일차항을 비교하면, $3cx=bx$, $b=3c$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x-1)}{f(x)-g(x)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{f(x)-g(x)}\times\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x-1)}{x-2}$ 에서

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x-1)}{x-2}$의 극한값이 존재하므로 $g(1)=0$

$g(1)=-2+c=0$에서 $c=2$ 그러므로 $b=6$, $a=-5$

$f(x)=-5x+6$, $g(x)=-2x^2+2x=-2x(x-1)$

$$\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-1)(x-2)}{-5x+6+2x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-1)(x-2)}{2x^2-7x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-1)(x-2)}{(x-2)(2x-3)}$$

$$=\frac{-2}{1}=-2,\ \lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-5x+6)^2}{-2x^2+2x}=\frac{25}{-2}$$

$$\therefore\ k=-2\times\left(\frac{25}{-2}\right)=25$$

7. 정답 ⑤

조건 (가)에서 $x\to 0$일 때 (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to$ 0이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)+g(x)-2\}=0$에서 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)+\lim\limits_{x\to 0}g(x)=2$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=b$라 하면 $a+b=2$ …… ㉠

조건 (나)에서 $\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)+x\}\{g(x)-2\}=\lim\limits_{x\to 0}x^2\{f(x)+9\}$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)\times\lim\limits_{x\to 0}\{g(x)-2\}=0$이므로

$a(b-2)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=2$이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0}g(x)=2$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=c$, $\lim\limits_{c\to0}\dfrac{g(x)-2}{x}=d$라 하면 조건 (가)에서

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+g(x)-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{g(x)-2}{x}=5$$

이므로 $c+d=5$ …… ㉢

조건 (나)에서 $x\neq 0$일 때,

$$\left\{\frac{f(x)}{x}+1\right\}\left\{\frac{g(x)-2}{x}\right\}=f(x)+9 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x)}{x}+1\right\}\left\{\frac{g(x)-2}{x}\right\}=\lim_{x\to0}\{f(x)+9\} \text{ 에서}$$

$$\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x)}{x}+1\right\}\times\lim_{x\to0}\frac{g(x)-2}{x}=\lim_{x\to0}f(x)+9$$

$(c+1)d=9$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $c=2$, $d=3$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2,\ \lim_{x\to0}\frac{g(x)-2}{x}=3$$

따라서

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)\{g(x)-2\}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\times\lim_{x\to0}g(x)\times\lim_{x\to0}\frac{g(x)-2}{x}$$
$$=2\times2\times3=12$$

8. [정답] ③

[해설]

함수 $h(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{g(x)} & (x\neq 2)\\ 3 & (x=2)\end{cases}$ 이고, $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=3$이므로 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수의 비는 $3:1$이다.

함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x\neq 2$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)\neq 0$ …… ㉠

삼차함수 $y=g(x)$의 그래프는 x축과 적어도 한 점에서 만나므로 ㉠에 의하여

$g(2)=0$

함수 $h(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to2}h(x)=h(2),\qquad \lim_{x\to2}\frac{f(x)}{g(x)}=3$$

$x\to2$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

$$\lim_{x\to2}f(x)=0\qquad \therefore\ f(2)=0$$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{h(x)}=\infty$, 즉 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\infty$ 이므로 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다. 자연수 n에 대하여

$$\lim_{x\to1-}\frac{1}{(x-1)^{2n-1}}=-\infty,\ \lim_{x\to1+}\frac{1}{(x-1)^{2n-1}}=\infty$$

이고,

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^{2n}}=\infty$$

이므로 $f(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다.

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{3(x-1)^2(x-2)}{(x-2)(x^2+ax+b)} & (x\neq 2)\\ 3 & (x=2)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{3(x-1)^2}{x^2+ax+b} & (x\neq 2)\\ 3 & (x=2)\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)}{g(x)}=3$, 즉 $\lim\limits_{x\to2}h(x)=3$에서

$$\lim_{x\to2}h(x)=\lim_{x\to2}\frac{3(x-1)^2}{x^2+ax+b}$$
$$=\frac{3}{2a+b+4}$$

$\dfrac{3}{2a+b+4}=3$이므로 $2a+b+4=1$, $b=-2a-3$

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{3(x-1)^2}{x^2+ax-2a-3} & (x\neq 2)\\ 3 & (x=2)\end{cases}$$

방정식 $h(x)=12$는 오직 한 실근을 갖는다. $h(2)=3$이므로 방정식의 한 실근은 2가 아니다. $h(x)=12$에서

$$\frac{3(x-1)^2}{x^2+ax-2a-3}=12$$
$$3x^2+2(2a+1)x-8a-13=0$$

방정식 $3x^2+2(2a+1)x-8a-13=0$은 $x\neq 2$인 오직 한 실근을 가지므로 중근을 갖는다.

판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(2a+1)^2+3(8a+13)=0$$
$$a=-5 \text{ 또는 } a=-2$$

㉠에 의하여 $x\neq 2$인 모든 실수 x에 대하여

$$x^2+ax+b\neq 0,\ \text{즉}\ x^2+ax-2a-3\neq 0$$

이므로 방정식 $x^2+ax-2a-3=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=a^2-4(-2a-3)<0,\qquad -6<a<-2$$
$$\therefore\ a=-5$$

따라서 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{3(x-1)^2}{x^2-5x+7} & (x\neq 2)\\ 3 & (x=2)\end{cases}$$

이므로 $h(0)=\dfrac{3}{7}$ 이다.

9. **정답** 28

풀이

조건 (가)에서 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$, $x=2$에서 연속이어야 한다.

함수 $|f(x)|$가 $x=-1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to-1-}|f(x)|=\lim_{x\to-1+}|f(x)|=|f(-1)| \text{ 이어야 한다.}$$

$$\lim_{x\to-1-}|f(x)|=\lim_{x\to-1-}|-2|=2,$$

$$\lim_{x\to-1+}|f(x)|=\lim_{x\to-1+}|x^2+ax+b|=|1-a+b|,$$

$|f(-1)|=|1-a+b|$

이므로

$|1-a+b|=2$

$1-a+b=-2$ 또는 $1-a+b=2$

$a-b=3$ 또는 $a-b=-1$

이때 $a<b$이므로 $a-b=-1$ …… ㉠

함수 $|f(x)|$가 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to 2-}|f(x)|=\lim_{x\to 2+}|f(x)|=|f(2)|$ 이어야 한다.

$\lim_{x\to 2-}|f(x)|=\lim_{x\to 2-}|x^2+ax+b|=|4+2a+b|$,

$\lim_{x\to 2+}|f(x)|=\lim_{x\to 2+}|2|=2$,

$|f(2)|=|4+2a+b|$

이므로

$|4+2a+b|=2$

$4+2a+b=-2$ 또는 $4+2a+b=2$

$2a+b=-6$ 또는 $2a+b=-2$ …… ㉡

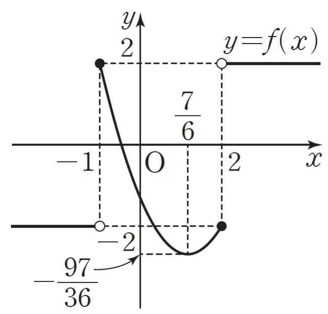
㉠, ㉡에서

(ⅰ) $a-b=-1$, $2a+b=-6$일 때,

연립하여 풀면 $a=-\frac{7}{3}$, $b=-\frac{4}{3}$이므로

$$f(x)=\begin{cases}-2 & (x<-1)\\ x^2-\frac{7}{3}x-\frac{4}{3}=\left(x-\frac{7}{6}\right)^2-\frac{97}{36} & (-1\le x\le 2)\\ 2 & (x>2)\end{cases}$$

이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$의 최솟값이 $-\frac{97}{36}$이고, -2보다 작으므로 조건 (나)를 만족시킨다.

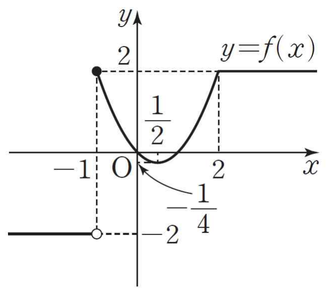
이때 $ab=\left(-\frac{7}{3}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{28}{9}$

(ⅱ) $a-b=-1$, $2a+b=-2$일 때,

연립하여 풀면 $a=-1$, $b=0$이므로

$$f(x)=\begin{cases}-2 & (x<-1)\\ x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} & (-1\le x\le 2)\\ 2 & (x>2)\end{cases}$$

이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$의 최솟값이 -2이고, 이 값은 -2보다 작지 않으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $ab=\frac{28}{9}$이므로 $9ab=28$

10. 정답 ②

임의의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이면 함수 $g(x)$, $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다. 그러므로 $\alpha\le\beta$인 두 상수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$를

$f(x)=(x+\alpha)(x+\beta)$라 하면

$$g(x)=\frac{x}{f(x^2+4)}=\frac{x}{(x^2+4+\alpha)(x^2+4+\beta)}$$

이다. 이때 $0<4+\alpha$이면 $0<4+\beta$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x^2+4)>0$이고, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 조건 (가)를 만족시킬 수 없다.

$4+\alpha<0$이면 함수 $g(x)$는 $x=-\sqrt{-\alpha-4}$, $x=\sqrt{-\alpha-4}$에서 불연속이므로 조건 (가)를 만족시킬 수 없다. 그러므로 $4+\alpha=0$, 즉 $\alpha=-4$이어야 하고 $f(x)=(x-4)(x+\beta)$이다.

이때 조건 (나)에서 함수 $h(x)$가 $x=b$, $x=c(b<c)$에서만 불연속이고 $h(x)=\frac{f(x-4)}{f(x^2)}=\frac{(x-8)(x-4+\beta)}{(x+2)(x-2)(x^2+\beta)}$이므로 함수 $h(x)$가 $x=-2$, $x=2$에서만 불연속이려면 $\beta>0$ 또는 $\beta=-4$이어야 한다.

(ⅰ) $\beta=-4$인 경우

$h(x)=\frac{(x-8)^2}{(x+2)^2(x-2)^2}$이고 $b=-2$, $c=2$이므로

$\lim_{x\to -2}h(x)$의 값이 존재하지 않는다.

(ⅱ) $\beta>0$인 경우

$h(x)=\frac{(x-8)(x-4+\beta)}{(x+2)(x-2)(x^2+\beta)}$이고 $b=-2$, $c=2$이므로

$\lim_{x\to -2}h(x)$의 값이 존재하려면

$\lim_{x\to -2}h(x)=\lim_{x\to -2}\frac{(x-8)(x-4+\beta)}{(x+2)(x-2)(x^2+\beta)}$에서 $x\to -2$일 때,

(분모) → 0이므로 (분자) → 0이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to -2}(x-8)(x-4+\beta)=-10(-6+\beta)=0$이므로

$\beta=6$이다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}h(x)&=\lim_{x\to -2}\frac{(x-8)(x+2)}{(x+2)(x-2)(x^2+6)}\\&=\lim_{x\to -2}\frac{x-8}{(x-2)(x^2+6)}\\&=\frac{-10}{-4\times 10}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x\to -2}h(x)$의 값이 존재한다.

따라서 $f(x)=(x-4)(x+6)$이므로 $f(c)=f(2)=-16$이고

$f(c)\times\lim_{x\to b}h(x)=-16\times\frac{1}{4}=-4$

Ch② 미분

TH①. 다항함수의 Graph

출제 : 13번,14번,20번,21번,22번

[Prediction] 10%

수2 미분 파트의 시작은 무조건 Graph이다.

2024년 5월 교육청모의고사

1. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$\lvert f(k)\rvert+\lvert g(k)\rvert=0$을 만족시키는 실수 k의 개수는 2이다.

$4f(1)+2g(1)=-1$일 때, $f(4)$의 값은?[1.]

① 46　② 49　③ 52

④ 55　⑤ 58

2025학년도 6월 평가원모의고사

2. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{x-a}=3$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 y절편이 4일 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① -1　② -2　③ -3

④ -4　⑤ -5

2025학년도 6월 평가원모의고사

3. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(a) \leq 0$인 실수 a의 최댓값은 2이다.
> (나) 집합 $\{x \mid f(x)=k\}$의 원소의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은 $\dfrac{8}{3}$이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=0$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

2024년 7월 교육청모의고사

4. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -2(x+1)^2+4 & (x \leq 0) \\ a(x-5) & (x>0) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 $f(k)=g(k)$를 만족시키는 서로 다른 모든 실수 k의 값이 -2, 0, 2일 때, $g(2a)$의 값은?

① 14 ② 18 ③ 22
④ 26 ⑤ 30

5. 두 함수 $f(x)=x^3-12x$, $g(x)=a(x-2)+2(a\neq 0)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 실수 a의 값의 범위는 $m<a<M$이다.

함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 실수 k가 존재한다.

$10\times(M-m)$의 값을 구하시오.

6. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 양수 p와 함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq x) \\ f(x-p)+3p & (f(x)<x) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(0)$의 값은?

① $4-3\sqrt{6}$ ② $2-2\sqrt{6}$ ③ $3-2\sqrt{6}$
④ $3-\sqrt{6}$ ⑤ $4-\sqrt{6}$

7. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=|f(x)|$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(8)$의 값을 구하시오.

> (가) 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=5$에서 미분가능하고,
> 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(5,\ g(5))$에서의 접선은 곡선 $y=g(x)$와 점 $(0,\ g(0))$에서 접한다.

8. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=|f(x)|-f'(x)$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음을 만족시킨다.

> (가) $g(0)=f(0)=1$
> (나) 방정식 $|f(x)|=3$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
> (다) 함수 $g(x)$가 $x=k$에서 미분 불가능한 실수 k의 개수는 3이다.

$g(1)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1
④ 4 ⑤ 7

9. 함수 $f(x)$를 $f(x)=(x+1)^2(x-1)^2$이라 하자.

$-1 \leq x \leq 1$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) \leq f'(t)(x-t)+f(t)$$

를 만족시키도록 하는 실수 t의 최댓값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+x & (f(x) \geq 0) \\ 2f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$$

이라 할 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$가 $x=t$에서 불연속인 실수 t의 개수는 1이다.

(나) 함수 $g(x)$가 $x=t$에서 미분가능하지 않은 실수 t의 개수는 2이다.

$f(-2)=-2$일 때, $f(6)$의 값을 구하시오.

연계 가능

11. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 2$

(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-2}{x} = 24$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$는 서로 다른 세 점 A, B, C에서 만나고 점 B는 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점일 때, $f(1)$의 최댓값을 구하시오. (단, 원점 O에 대하여 $\overline{\mathrm{OA}} < \overline{\mathrm{OB}} < \overline{\mathrm{OC}}$이다.)

2024년 수능특강 Lv3

12. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+16$과 실수 t에 대하여 집합

$$A=\{x \mid f(x)f'(t)(x-t)+f(x)f(t)=0\}$$

일 때, 집합 A의 원소의 개수가 1이 되도록 하는 모든 t의 값의 합은?

① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

13. 1이 아닌 실수 α와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $|f(x)-f(1)|$은 $x=\alpha$에서만 미분가능하지 않다.
>
> (나) 함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{1}{2}$에서 극솟값 0을 갖는다.

실수 t에 대하여 방정식 $f(f(x))=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 $t=\beta$에서만 불연속이다. $\alpha+\beta$의 값은? (단, β는 실수이다.)

① $-\dfrac{9}{16}$ ② $-\dfrac{7}{16}$ ③ $-\dfrac{5}{16}$

④ $-\dfrac{3}{16}$ ⑤ $-\dfrac{1}{16}$

2024년 수능특강 Lv3

14. 함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $\{f(x)-f(3)\}^2+\{f'(2)\}^2=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
>
> (나) $0<f(3)<f(2)$

$x \geq k$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \geq f(3)$이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은 p이다. $(3p-1)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

15. 두 실수 a, k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} k(x-a)(x-a+2) & (x<a) \\ |x-a-1|-1 & (a\le x\le a+2) \\ k(x-a-4)(x-a-2) & (x>a+2) \end{cases}$$

라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

| 보기 |

ㄱ. $a=-1$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
ㄴ. $0\le k\le 1$이면 함수 $f(x)$의 최솟값은 -1이다.
ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=2$에서만 미분가능하지 않으면 $a+k=\dfrac{1}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)+2x & (x<-1) \\ -f(x)-2x+a & (-1\le x<2) \\ f(x)+2x+b & (x\ge 2) \end{cases}$$

라 하면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. $g(-2)=6$일 때, $g(1)+g(3)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

17. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x^2}=\frac{1}{2}$
(나) $0<x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
$f(x_2)-f(x_1)+x_2^2-x_1^2>0$이다.

$f(\sqrt{2})$의 최솟값을 m이라 할 때, $9m^2$의 값을 구하시오. [4점]

2024년 수능완성 실전편 (22번)

18. 함수 $f(x)=x^4-\frac{8}{3}x^3-2x^2+8x+2$와 상수 k에 대하여

함수 $g(x)$는

$$g(x)=|f(x)-k|$$

이고 두 집합 A, B를

$$A=\left\{x\,\middle|\,\lim_{h\to 0-}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to 0+}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=0\right\}$$

$$B=\{g(x)\mid x\in A\}$$

라 할 때, $n(A)=7$, $n(B)=3$이다. 집합 B의 모든 원소의 합이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2024년 수능완성 실전편 (22번)

19. 삼차함수 $f(x)=(x+2)(x-1)^2$에 대하여 0이 아닌 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ k-f(-x) & (x>0) \end{cases}$$

이 있다. 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(t,\ g(t))$ $(t\neq 0)$에서의 접선 $y=h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

직선 $y=h(x)$가 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점의 개수가 2 이상일 때, 방정식 $g(x)=h(x)$의 서로 다른 모든 실근의 곱이 음수가 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t \mid t\leq -p$ 또는 $t=p$ 또는 $t\geq 1\}$ $(0<p<1)$ 이다.

$(k\times p)^3$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]

TH②. 새로운 변수로 표현된 함수 [4점]

출제 : 13번,14번,20번,21번,22번

2025년 사관학교

2025 Trend

20. 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(3-x)=f(3+x)$이다. (나) 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1,\ t+1]$에서의 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때, $-1\leq t\leq 1$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=g(1)$이다.

$f(2)=0$일 때, $f(5)$의 값은?

① 36 ② 37 ③ 38
④ 39 ⑤ 40

2025년 사관학교

2025 Trend

21. $-6 \leq t \leq 2$인 실수 t와 함수 $f(x)=2x(2-x)$에 대하여 x에 대한 방정식

$$\{f(x)-t\}\{f(x-1)-t\}=0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x|0 \leq x \leq 3\}$에 속하는 가장 큰 값과 가장 작은 값의 차를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 $t=a$에서 불연속이다. $\lim_{t \to a-} g(t)+\lim_{t \to a+} g(t)$의 값은? (단, a는 $-6<a<2$인 상수이다.)

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4

④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

2024년 3월 교육청모의고사 (22번)

2025 Trend

22. 함수

$$f(x)=|x^3-3x+8|$$

과 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t, t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$와 $t=\beta$에서만 미분가능하지 않다. $\alpha\beta=m+n\sqrt{6}$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이다.)

2024년 5월 교육청모의고사 (22번)

2025 Trend

23.. 최고차항의 계수가 4이고 서로 다른 세 극값을 갖는 사차 함수 $f(x)$와 두 함수 $g(x)$, $h(x)=\begin{cases} 4x+2 & (x<a) \\ -2x-3 & (x \geq a) \end{cases}$가 있다. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
>
> $|g(x)|=f(x)$, $\lim_{t \to 0+} \frac{g(x+t)-g(x)}{t}=|f'(x)|$ 이다.
>
> (나) 함수 $g(x)h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$g(0)=\frac{40}{3}$일 때, $g(1)\times h(3)$의 값을 구하시오.(단, a는 상수이다.)

2024년 수능완성

2025 Trend

24. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 두 실수 α, β $(\alpha<\beta)$에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$
>
> (나) $f(\alpha)f(\beta)<0$, $f(\alpha)+f(\beta)>0$

방정식 $|f(x)|=|f(k)|$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 실수 k의 개수는 m이고, 이러한 m개의 실수 k의 값을 작은 수부터 차례로 k_1, k_2, k_3, $\cdots$, k_m이라 하자.

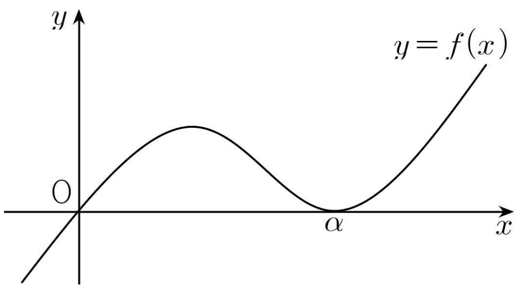
$\sum_{i=1}^{m} f(k_i)=nf(\alpha)$일 때, $m+n$의 값을 구하시오.

(단, m, n은 자연수이다.)

1. **정답** ②

$|f(k)|+|g(k)|=0$은 $f(k)=0$이고 $g(k)=0$

함숫값과 접선의 y절편이 모두 0인 점이 2점이 존재해야하는 그래프는 아래 그림과 같다.



$f(x)=x(x-\alpha)^2=x^3-2\alpha x^2+\alpha^2 x,\ f'(x)=3x^2-4\alpha x+\alpha^2$

$(t,\ f(t))$에서의 접선

$y=(3t^2-4\alpha t+\alpha^2)(x-t)+t^3-2\alpha t^2+\alpha^2 t$에서

$g(t)=-3t^3+4\alpha t^2-\alpha^2 t+t^3-2\alpha t^2+\alpha^2 t=-2t^3+2\alpha t^2$

$4f(1)+2g(1)=-1$이므로

$4(1-2\alpha+\alpha^2)+2(-2+2\alpha)=-1,\ 4\alpha^2-4\alpha+1=0,\ \alpha=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ f(x)=x\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2,\ f(4)=4\times\left(4-\dfrac{1}{2}\right)^2=4\times\dfrac{49}{4}=49$

2. [정답] ⑤

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 공통범위 11 [4.00점]

[해설]

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3+px^2+qx\ \ (p,\ q\text{는 상수})$$

라 하면 $\quad f'(x)=3x^2+2px+q$

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{x-a}=3$에서 $x\to a$일 때 (분모) → 0이고 극한값이 존재하므로 (분자) → 0이다.

즉 $\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)-1\}=0$에서 $\quad f(a)=1$

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=3$에서 $\quad f'(a)=3$

즉 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$에서 $\quad y=3(x-a)+1$

이 직선의 y절편이 4이므로

$$-3a+1=4,\qquad a=-1$$

즉 $f(-1)=1$에서 $\quad -1+p-q=1,\qquad p-q=2$

$f'(-1)=3$에서 $\quad 3-2p+q=3,\qquad -2p+q=0$

두 식을 연립하여 풀면 $\quad p=-2,\ q=-4$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2-4x$ 이므로

$$\begin{aligned}f(1)&=1^3-2\times1^2-4\times1\\&=-5\end{aligned}$$

3. [정답] 15

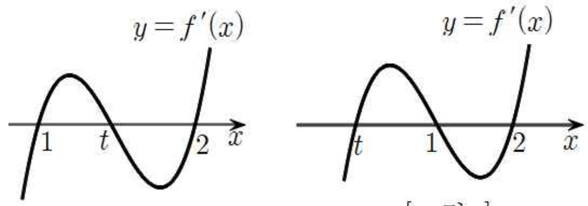
[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 공통범위 21 [4.00점]

[해설]

조건 (나)에서 집합 $\{x|f(x)=k\}$의 원소의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 값이 존재하므로 사차함수 $f(x)$는 극값을 3개 가진다.

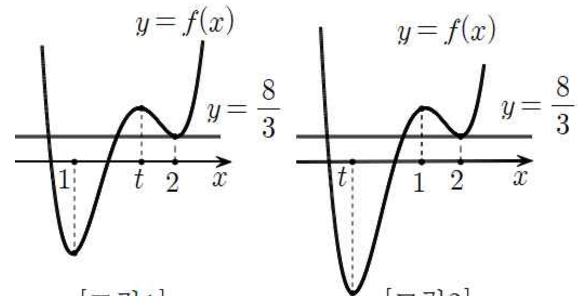
조건 (가)에서 $f'(a)\le 0$인 실수 a의 최댓값이 2이므로 $f'(2)=0$이다.

$f'(1)=0$이므로 방정식 $f'(x)=0$의 다른 한 근을 t라 하면 함수 $y=f'(x)$의 개형은 다음 그림과 같다.



[그림1] [그림2]

이때 $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 개형은 다음과 같다.



[그림1] [그림2]

따라서 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{8}{3}$이 접하므로 방정식 $f(x)=\dfrac{8}{3}$을 만족하는 다른 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-2)^2+\frac{8}{3}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

$f(0)=0$이므로 ㉠에 대입하면

$$4\alpha\beta+\frac{8}{3}=0\qquad\therefore\ \alpha\beta=-\frac{2}{3}\qquad\cdots\cdots ㉡$$

$$\begin{aligned}f'(x)=&(x-\beta)(x-2)^2+(x-\alpha)(x-2)^2\\&+2(x-\alpha)(x-\beta)(x-2)\end{aligned}$$

$f'(1)=0$이므로

$$\begin{aligned}f'(1)&=1-\beta+1-\alpha-2(1-\alpha-\beta+\alpha\beta)\\&=\alpha+\beta-2\alpha\beta\\&=\alpha+\beta+\frac{4}{3}=0\end{aligned}$$

$$\therefore\ \alpha+\beta=-\frac{4}{3}\qquad\cdots\cdots ㉢$$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(3)&=(3-\alpha)(3-\beta)+\frac{8}{3}\\&=9-3(\alpha+\beta)+\alpha\beta+\frac{8}{3}\\&=9-3\times\left(-\frac{4}{3}\right)-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}\quad(\because\ ㉡,㉢)\\&=15\end{aligned}$$

4. [정답] ④

[해설]

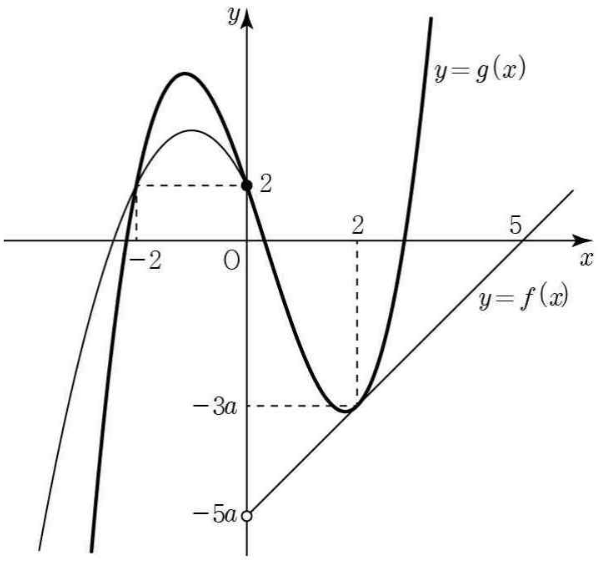
$f(-2)=g(-2)=2$, $f(0)=g(0)=2$이므로
삼차방정식 $g(x)=2$의 서로 다른 세 실근을 -2, 0, t라 하면

$g(x)-2=x(x+2)(x-t)$

$g(x)=x(x+2)(x-t)+2$

$\quad =x^3+(2-t)x^2-2tx+2$

$f(k)=g(k)$를 만족시키는 양수 k의 값은 2뿐이므로, 이를 만족시키는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$x>0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선과 일치한다.

$f(2)=g(2)$이고 $f'(2)=g'(2)$

$f(2)=a(2-5)=-3a$

$g(2)=8+4(2-t)-4t+2=18-8t$

$-3a=18-8t$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(2)=g'(2)$이므로

$f'(x)=a(x>0)$에서

$f'(2)=a$

$g'(x)=3x^2+2(2-t)x-2t$에서

$g'(2)=20-6t$

$a=20-6t$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $a=2$, $t=3$

$g(x)=x^3-x^2-6x+2$

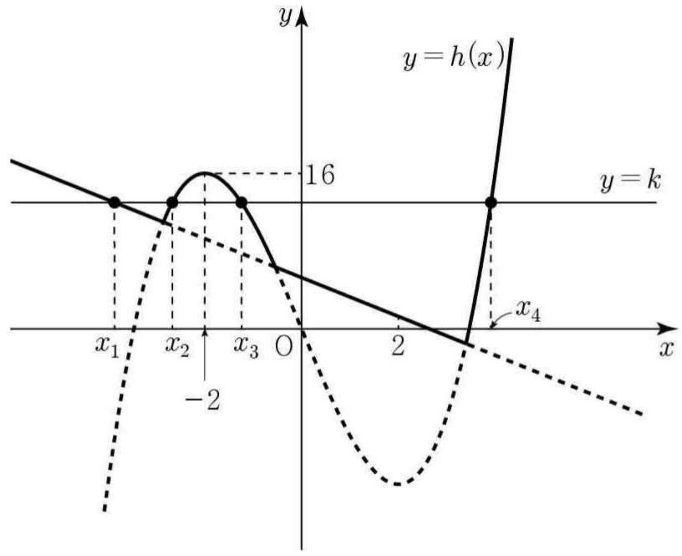
따라서 $g(2a)=g(4)=26$

5. [정답] 35

[해설]

직선 $y=k$가 곡선 $y=f(x)$, 직선 $y=g(x)$와 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 각각 3, 1이므로
함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가
서로 다른 네 점에서 만나는 경우는 직선 $y=k$와 곡선 $y=f(x)$는 서로 다른 세 점에서 만나고 직선 $y=k$와 직선 $y=g(x)$는 한 점에서 만나며 이 네 점이 모두 서로 다른 경우이다.

함수 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$이므로 직선 $y=k$와 직선 $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표를 x_1이라 하면 $f(x_1)<g(x_1)$직선 $y=k$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 서로 다른 세 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 x_2, x_3, x_4라 하면 $f(x_2)>g(x_2)$, $f(x_3)>g(x_3)$, $f(x_4)>g(x_4)$이를 만족시키는 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



직선 $y=g(x)$가 점 $(2,\ 2)$를 지나고 $x_1<x_2$, $f(x_1)<g(x_1)=k$인 실수 x_1이 존재하므로 직선 $y=g(x)$의 기울기는 음수이다.

$y=g(x)=a(x-2)+2$에서 $a<0$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(x)=3x^2-12=3(x-2)(x+2)$

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 갖고 $x=-2$에서 함수 $f(x)$의 함숫값은 함수 $g(x)$의 함숫값보다 크다.

$f(-2)>g(-2)$

$16>-4a+2$

$a>-\dfrac{7}{2}$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $-\dfrac{7}{2}<a<0$

$m=-\dfrac{7}{2}$, $M=0$

따라서 $10\times(M-m)=10\times\left\{0-\left(-\dfrac{7}{2}\right)\right\}=35$

6. [정답] ③

7. [정답] 118

8. [정답] ④

[해설]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)|-f'(x)$이다.

양변에 $x=0$을 대입하면

$\qquad g(0)=|f(0)|-f'(0)$

$g(0)=f(0)=1$이므로 $\qquad f'(0)=0$

방정식 $|f(x)|=3$의 서로 다른 실근의 개수는 3이므로 $f(x)=-3$, $f(x)=3$인 실수 x의 개수는 각각 1, 2 또는 2, 1이다.

즉, 삼차함수 $f(x)$의 한 극값은 -3 또는 3이다.

$f(0)=1$, $f'(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값 1을 갖는다.

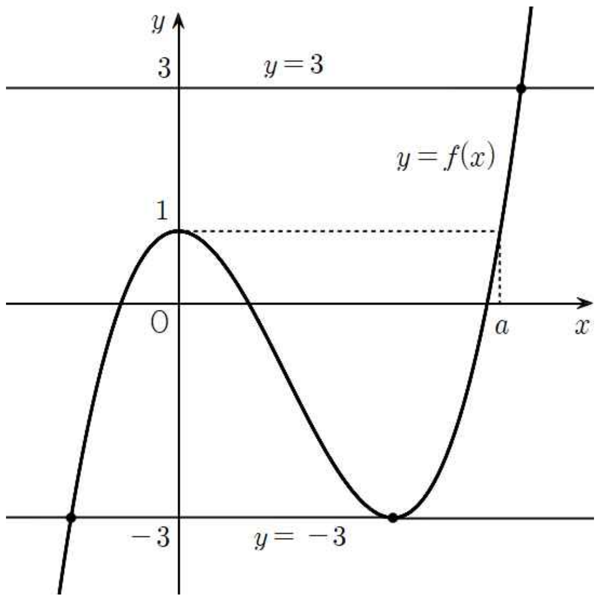
함수 $f'(x)$는 미분가능한 함수이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 세 점에서 미분가능하지 않으므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 세 점에서 미분가능하지 않다.

함수 $|f(x)|$가 $x=k$에서 미분가능하지 않으면

$\qquad f(k)=0$, $f'(k)\neq 0$

즉, 곡선 $y=f(x)$는 x축과 세 점에서 만난다. 따라서 함수

$y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=1$ 의 교점 중에서 점 $(0,\ 1)$ 이 아닌 교점의 x 좌표를 a 라 하면

$$f(x)=x^2(x-a)+1$$

$$f'(x)=2x(x-a)+x^2=x(3x-2a)$$

방정식 $f'(x)=0$ 에서 $\quad x=0$ 또는 $x=\dfrac{2a}{3}$

$f\left(\dfrac{2a}{3}\right)=-3$ 이므로

$$\left(\frac{2a}{3}\right)^2\times\left(-\frac{a}{3}\right)+1=-3, \qquad a=3$$

$$\therefore\ f(x)=x^2(x-3)+1,\ f'(x)=3x(x-2)$$

따라서

$$g(1)=|f(1)|-f'(1)=4$$

9. [정답] ②

[해설]

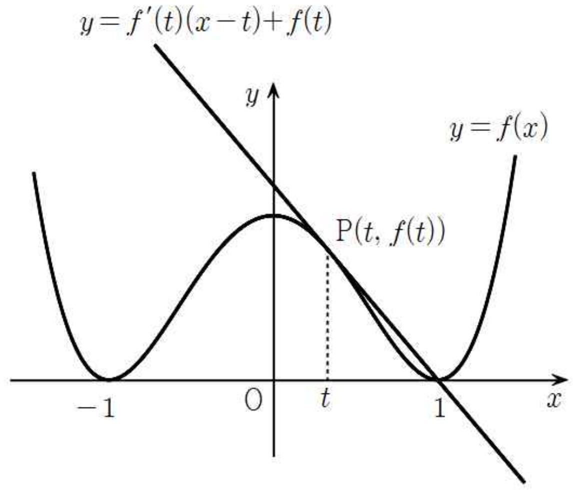
사차함수

$$f(x)=(x+1)^2(x-1)^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

위의 점 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ 에서의 접선의 방정식

$$y=f'(t)(x-t)+f(t) \qquad \cdots\cdots ㉡$$

에 대하여 $-1\le x\le 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x)\le f'(t)(x-t)+f(t)$ 가 성립하므로 주어진 구간에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 P 에서의 접선에 접하거나 아래 그림처럼 접선의 방정식 아래에 놓여야 한다.



접점 P 의 x 좌표 t 의 값이 최대인 경우는 ㉡의 접선의 방정식이 점 $(1,\ 0)$ 을 지나는 경우이다. 따라서 점 P 와 $(1,\ 0)$ 을 지나는 직선의 기울기와 점 P 에서의 접선의 기울기가 같아야 하므로

㉠에서 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=4x(x+1)(x-1)=4x^3-4x$$

이므로

$$\frac{f(t)}{t-1}=f'(t), \qquad f(t)=(t-1)f'(t)$$

$$t^4-2t^2+1=(t-1)(4t^3-4t)$$

$$3t^4-4t^3-2t^2+4t-1=0, \qquad (t-1)^2(t+1)(3t-1)=0$$

$$t=1 \text{ 또는 } t=-1 \text{ 또는 } t=\frac{1}{3}$$

그런데 점 P 는 열린구간 $(-1,\ 1)$ 에 있으므로 구하는 실수 t 의 최댓값은 $\dfrac{1}{3}$ 이다.

10. [정답] 486

[해설]

실수 t 에 대하여 $f(t)>0$ 이면 $g(x)=f(x)+x$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=t$ 에서 연속이고 미분가능하다. $f(t)<0$ 이면 $g(x)=2f(x)$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=t$ 에서 연속이고 미분가능하다. $f(t)=0$ 이면 아래와 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

- $x=t$ 의 좌우에서 $f(x)$ 의 부호가 서로 다른 경우

$$g(t)=f(t)+t=t$$

$$\lim_{x\to t-}g(x)=\lim_{x\to t-}\{f(x)+x\}=f(t)+t=t,$$

$$\lim_{x\to t+}g(x)=\lim_{x\to t+}2f(x)=2f(t)=0$$

또는

$$\lim_{x\to t-}g(x)=\lim_{x\to t-}2f(x)=2f(t)=0,$$

$$\lim_{x\to t+}g(x)=\lim_{x\to t+}\{f(x)+x\}=f(t)+t=t \text{ 이므로}$$

함수 $g(x)$ 는 $t=0$ 이면 $x=t$ 에서 연속이고 $t\ne 0$ 이면 $x=t$ 에서 불연속이다.

- $x=t$ 의 좌우에서 $f(x)$ 의 부호가 모두 양인 경우

$g(t)=f(t)+t=t,$

$\lim\limits_{x\to t}g(x)=\lim\limits_{x\to t}\{f(x)+x\}=f(t)+t=t$ 이므로

함수 $g(x)$ 는 $x=t$ 에서 연속이다.

- $x=t$ 의 좌우에서 $f(x)$ 의 부호가 모두 음인 경우

$g(t)=f(t)+t=t,$

$\lim\limits_{x\to t}g(x)=\lim\limits_{x\to t}2f(x)=2f(t)=0$ 이므로

함수 $g(x)$ 는 $t=0$ 이면 $x=t$ 에서 연속, $t\ne 0$ 이면 $x=t$ 에서 불연속이다.

$f(x)=0$ 을 만족시키는 실근의 개수가 1 이면 함수 $g(x)$ 가 $x=t$ 에서 미분가능하지 않은 t 의 개수가 1 이하이므로 (나)를 만족시키지 않는다. $f(x)=0$ 을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수가 3 이면 0 이 아닌 서로 다른 실근의 개수가 2 이상이고 함수 $g(x)$ 가 $x=t$ 에서 불연속인 t 의 개수가 2 이상이므로 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $f(x)=0$ 을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수는 2 이고 $a<b$ 인 두 실수 $a,\ b$ 가 존재하여 $f(x)=(x-a)(x-b)^2$ 또는 $f(x)=(x-a)^2(x-b)$

(ⅰ) $f(x)=(x-a)(x-b)^2$인 경우

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(b+h)-g(b)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(b+h-a)h^2+h}{h}=1$$

$g'(b)=1$이며 함수 $g(x)$가 $x=t$에서 미분가능하지 않은 실수 t의 개수가 1 이하이므로 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $f(x)=(x-a)^2(x-b)$, $a\neq 0$, $b\neq 0$인 경우

함수 $g(x)$가 $x=a$, $x=b$에서 불연속이므로 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $f(x)=(x-a)^2(x-b)$, $a=0$, $b\neq 0$인 경우

$x=a$에서 연속이며 $g(a)=f(a)+a=0$이다.

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2(a+h-b)}{h}=0$$

$g'(a)=0$이므로 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $f(x)=(x-a)^2(x-b)$, $a\neq 0$, $b=0$인 경우

함수 $g(x)$는 $x=a$에서 불연속이며 미분가능하지 않다. $x=b$에서 연속이며 $g(b)=f(b)+b=0$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(b+h)-g(b)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{2h(h-a)^2}{h}=2a^2$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(b+h)-g(b)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{(h-a)^2h+h}{h}$$
$$=a^2+1$$

$2a^2\neq a^2+1$, $a^2\neq 1$이면 함수 $g(x)$는 $x=b$에서 미분가능하지 않다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $f(x)=x(x-a)^2$, $a<0$, $a^2\neq 1$

$f(-2)=-2(-2-a)^2=-2$에서 $a=-3$

따라서 $f(x)=x(x+3)^2$이고 $f(6)=486$

11. **정답** 44

풀이

조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=2$이므로 다항함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이다.

조건 (나)의

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=24 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

에서 $x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}\{f(x)-2\}=0$에서 다항함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$\lim_{x\to 0}\{f(x)-2\}=f(0)-2=0$, $f(0)=2$

이때 ㉠에서 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=24$이므로

$f'(0)=24$

한편, $f(0)=2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(0, 2)$를 지난다. 또 점 $(0, 2)$는 직선 $y=2$ 위의 점이므로 세 점 A, B, C 중 한 점의 좌표가 $(0, 2)$이다. 원점 O에서 직선 $y=2$ 위의 점 중 점 $(0, 2)$까지의 거리가 최소이고 $\overline{OA}<\overline{OB}<\overline{OC}$이므로 점 A의 좌표는 $(0, 2)$이다.

두 점 B, C의 x좌표를 각각 b, c $(0<|b|<|c|)$라 하면 점 B가 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점이므로

$c=3b$

이때 $f(x)-2=2x(x-b)(x-3b)$이므로

$f(x)=2x(x-b)(x-3b)+2$

$f'(x)=2(x-b)(x-3b)+2x(x-3b)+2x(x-b)$

$f'(0)=6b^2=24$에서

$b^2=4$

$b=-2$ 또는 $b=2$

(ⅰ) $b=-2$일 때,

$f(x)=2x(x+2)(x+6)+2$

$f(1)=2\times 1\times 3\times 7+2=44$

(ⅱ) $b=2$일 때,

$f(x)=2x(x-2)(x-6)+2$

$f(1)=2\times 1\times(-1)\times(-5)+2=12$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(1)$의 최댓값은 44이다.

12. **정답** ②

풀이

$f(x)=x^3-6x^2+9x+16$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	20	↘	16	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 20을 갖고, $x=3$에서 극솟값 16을 갖는다.

한편, $f(x)=(x+1)(x^2-7x+16)$이고

모든 실수 x에 대하여

$x^2-7x+16=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$이므로

$f(x)=0$에서 $x=-1$

집합 A의 $f(x)f'(t)(x-t)+f(x)f(t)=0$에서

$f(x)\{f'(t)(x-t)+f(t)\}=0$

$f(x)=0$ 또는 $f'(t)(x-t)+f(t)=0$

이때 $g(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(t, f(t))$에서의 접선이다. 집합 A의 원소의 개수가 1이려면 방정식 $f(x)g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 1이어야 한다.

즉, 접선 $y=g(x)$가 x축에 평행하거나 점 $(-1, 0)$을 지나야 한다.

$t=1$ 또는 $t=3$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(t, f(t))$에서의 접선 $y=g(x)$는 x축에 평행하다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3-6t^2+9t+16)=(3t^2-12t+9)(x-t)$

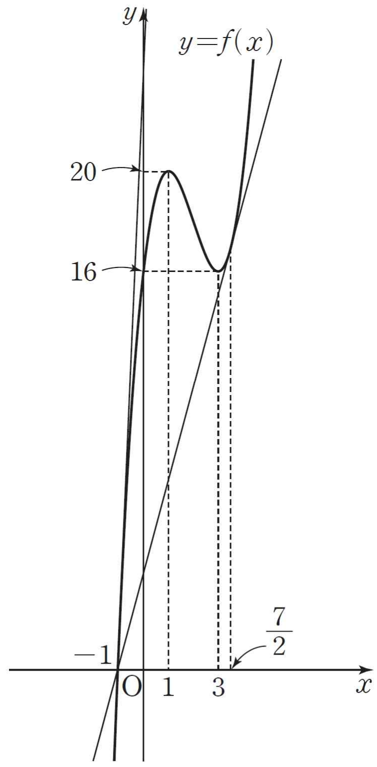
이 접선이 점 $(-1, 0)$을 지날 때,

$0-(t^3-6t^2+9t+16)=(3t^2-12t+9)(-1-t)$

$(t+1)^2(2t-7)=0$

$t=-1$ 또는 $t=\frac{7}{2}$

즉, $t=-1$ 또는 $t=\frac{7}{2}$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(t, f(t))$에서의 접선 $y=g(x)$는 점 $(-1, 0)$을 지난다.



따라서 집합 A의 원소의 개수가 1이 되도록 하는 모든 t의 값의 합은

$-1+1+3+\frac{7}{2}=\frac{13}{2}$

13. **정답** ③

풀이

사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고, 조건 (가)에서 함수 $|f(x)-f(1)|$은 $x=\alpha$ $(\alpha\neq 1)$에서만 미분가능하지 않으므로

$f(x)-f(1)=(x-1)^3(x-\alpha)$

로 놓을 수 있다.

즉, $f(x)=(x-1)^3(x-\alpha)+f(1)$

$\quad=x^4-(\alpha+3)x^3+3(\alpha+1)x^2-(3\alpha+1)x+\alpha+f(1)$

$f'(x)=4x^3-3(\alpha+3)x^2+6(\alpha+1)x-(3\alpha+1)$

$\quad=(x-1)^2(4x-3\alpha-1)$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$가 $x=-\frac{1}{2}$에서 극값을 가지므로

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2(-2-3\alpha-1)=0$에서

$\alpha=-1$

조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 극솟값이 0이므로

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}-1\right)^3\left(-\frac{1}{2}+1\right)+f(1)=0$

$f(1)=\frac{27}{16}$

그러므로 $f(x)=(x-1)^3(x+1)+\frac{27}{16}$

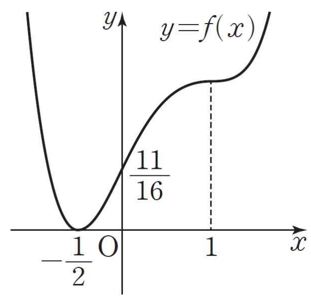
한편, $f'(x)=2(x-1)^2(2x+1)=0$에서

$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	$\frac{27}{16}$	↗

$f(0)=\frac{11}{16}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(f(x))=t$에서

$f(x)=X$ $(X\geq 0)$이라 하면

$f(X)=t$

(ⅰ) $t<\frac{11}{16}$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$는 만나지 않거나 만나는 경우에도 교점의 x좌표의 값이 0보다 작으므로 방정식 $f(X)=t$의 해는 없다. 즉, $g(t)=0$이다.

(ⅱ) $t=\frac{11}{16}$일 때,

$f(X)=\frac{11}{16}$에서 $X=0$

즉, $f(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$이므로

$g\left(\frac{11}{16}\right)=1$

(ⅲ) $t>\frac{11}{16}$일 때,

제1사분면에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$는 오직 한 점에서 만나므로 방정식 $f(X)=t$를 만족시키는 실수 X의 값은 1개 존재한다.

방정식 $f(X)=t$의 실근을 p $(p>0)$이라 하면 $X=p$에서

$f(x)=p$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=p$ $(p>0)$은 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=p$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

즉, $g(t)=2$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$$g(t)=\begin{cases}0 & \left(t<\frac{11}{16}\right)\\ 1 & \left(t=\frac{11}{16}\right)\\ 2 & \left(t>\frac{11}{16}\right)\end{cases}$$

함수 $g(t)$는 $t=\frac{11}{16}$에서만 불연속이므로

$\beta=\frac{11}{16}$

따라서 $\alpha+\beta=-1+\frac{11}{16}=-\frac{5}{16}$

14. **정답** 10

풀이

조건 (가)에서

$\{f(x)-f(3)\}^2+\{f'(2)\}^2=0$

이므로

$f(x)-f(3)=0$, $f'(2)=0$

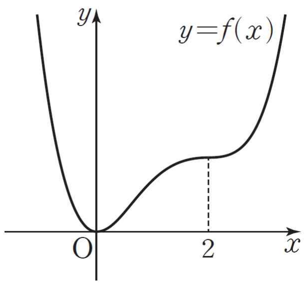
방정식 $\{f(x)-f(3)\}^2+\{f'(2)\}^2=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 방정식 $f(x)-f(3)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

한편, $f(x)=x^4+ax^3+bx^2$에서 $f(0)=0$

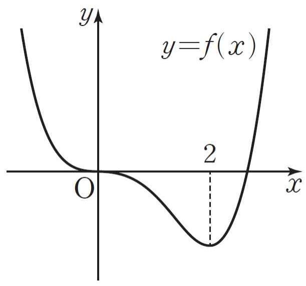
$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx=x(4x^2+3ax+2b)$에서

$f'(0)=0$

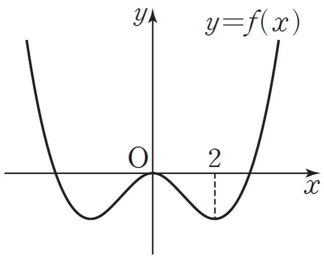
(ⅰ) 함수 $f(x)$가 $x=0$에서만 극값을 갖는 경우
이때 $f(2)<f(3)$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



(ⅱ) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서만 극값을 갖는 경우
이때 $f(2)<f(3)$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

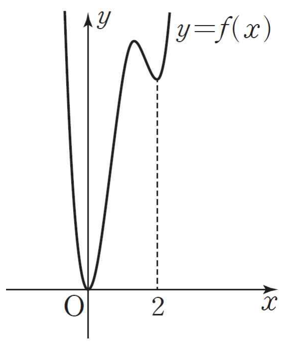


(ⅲ) 함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=2$에서 모두 극값을 갖는 경우 $f(0)=0$이고 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가지면 $f(2)<0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

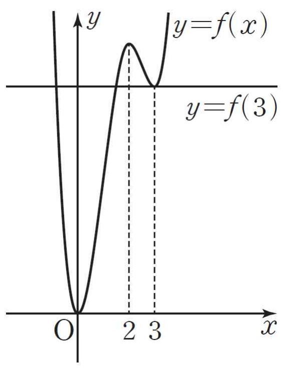


따라서 함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=2$에서 모두 극값을 갖는 경우에는 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

(a) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값을 갖는 경우
이때 $f(2)<f(3)$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



(b) 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 갖는 경우
조건 (나)에서 $f(3)>0$이고
방정식
$f(x)-f(3)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값을 가져야 한다.



즉,
$f'(0)=f'(2)=f'(3)=0$이므로 이차방정식 $4x^2+3ax+2b=0$의 두 근이 2, 3이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$2+3=-\dfrac{3a}{4}$, $2\times3=\dfrac{2b}{4}$

즉, $a=-\dfrac{20}{3}$, $b=12$

이때 $f(x)=x^4-\dfrac{20}{3}x^3+12x^2$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $f(x)=x^4-\dfrac{20}{3}x^3+12x^2$이므로

$f(3)=9$

$f(x)=9$에서 $x^4-\dfrac{20}{3}x^3+12x^2=9$

$3x^4-20x^3+36x^2-27=0$

$(x-3)^2(3x^2-2x-3)=0$

$x=3$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{10}}{3}$

$x\geq k$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq f(3)$이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은 $\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$이다.

따라서 $p=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$이므로

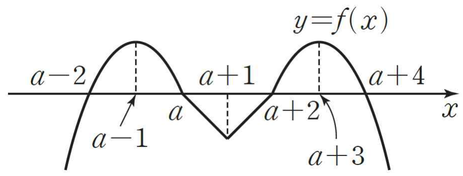
$(3p-1)^2=\left(3\times\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}-1\right)^2=10$

15. 정답 ⑤

함수 $y=k(x-a-4)(x-a-2)$의 그래프는 함수 $y=k(x-a)(x-a+2)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

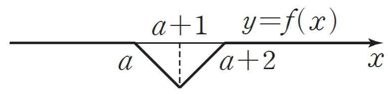
또한 $|x-a-1|-1=\begin{cases}-x+a & (x<a+1)\\ x-a-2 & (x\geq a+1)\end{cases}$이므로 실수 k의 값에 따라 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

(ⅰ) $k<0$일 때



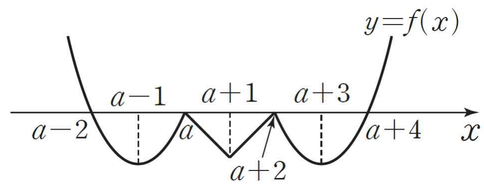
[그림 1]

(ⅱ) $k=0$일 때



[그림 2]

(ⅲ) $k>0$일 때



[그림 3]

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 k의 값에 관계없이 항상 직선 $x=a+1$에 대하여 대칭임을 알 수 있다.

ㄱ. $a=-1$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=0$, 즉 y축에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. $f(a+1)=-1$이므로
$k=0$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a+1$에서 최솟값 $f(a+1)=-1$을 갖는다.
$0<k\leq1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 3]과 같다.
이때 $f(a-1)=k\times(-1)\times1=-k$
이므로 $-1\leq f(a-1)=-k<0$
따라서 $0\leq k\leq1$이면 함수 $f(x)$의 최솟값은 -1이다. (참)

ㄷ. $k\geq0$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$, $x=a+1$, $x=a+2$에서 미분가능하지 않으므로 함수 $f(x)$가 $x=2$에서만 미분가능하지 않으려면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 [그림 1]과 같아야 한다. 즉, $k<0$이고 함수 $f(x)$는 $x=a+1$에서만 미분가능하지

않고, $x=a$, $x=a+2$에서 미분가능하여야 한다.

이때 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하지 않으므로

$a+1=2$에서 $a=1$

함수 $f(x)$가 $x=a$, 즉 $x=1$에서 미분가능하려면

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

이어야 한다.

$f(1)=0$이므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{k(x-1)(x+1)}{x-1}=k\lim_{x\to1-}(x+1)=2k$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{|x-2|-1}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$$

$2k=-1$에서 $k=-\frac{1}{2}$

이때 $f(3)=0$이므로 $a=1$, $k=-\frac{1}{2}$이면

$$\lim_{x\to3-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3-}\frac{|x-2|-1}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x-3}=1$$

$$\lim_{x\to3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3+2}\frac{-\frac{1}{2}(x-3)(x-5)}{x-3}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to3+}(x-5)=-\frac{1}{2}\times(-2)=1$$

즉,

$$\lim_{x\to3-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=a+2$, 즉 $x=3$에서도 미분가능하다.

따라서 $a+k=1+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

16. 정답 52

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1-}g(x)=\lim_{x\to-1+}g(x)=g(-1)$에서

$f(-1)-2=-f(-1)+2+a$

$f(-1)=\frac{a+4}{2}$ …… ㉠

$\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2+}g(x)=g(2)$에서

$-f(2)-4+a=f(2)+4+b$

$f(2)=\frac{a-b-8}{2}$ …… ㉡

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하다.

$$\lim_{x\to-1-}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1-}\frac{f(x)+2x-\{f(-1)-2\}}{x+1}=f'(-1)+2$$

$$\lim_{x\to-1+}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to-1+}\frac{-f(x)-2x+a-\{-f(-1)+2+a\}}{x+1}=-f'(-1)-2$$

즉, $f'(-1)+2=-f'(-1)-2$이므로

$f'(-1)=-2$ …… ㉢

또한 함수 $g(x)$는 $x=2$에서도 미분가능하다.

$$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{-f(x)-2x+a-\{-f(2)-4+a\}}{x-2}=-f'(2)-2$$

$$\lim_{x\to2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{f(x)+2x+b-\{f(2)+4+b\}}{x-2}=f'(2)+2$$

즉, $-f'(2)-2=f'(2)+2$

$f'(2)=-2$ …… ㉣

㉢, ㉣에 의하여

$f'(x)+2=3(x+1)(x-2)=3x^2-3x-6$

즉, $f'(x)=3x^2-3x-8$이므로

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-8x+C$ (단, C는 적분상수)

$g(-2)=f(-2)-4=-8-6+16+C-4=6$에서

$C=8$이므로

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-8x+8$

$f(-1)=-1-\frac{3}{2}+8+8=\frac{27}{2}$이고 ㉠에서 $f(-1)=\frac{a+4}{2}$이므로

$\frac{a+4}{2}=\frac{27}{2}$에서 $a=23$

$f(2)=8-6-16+8=-6$이고 ㉡에서 $f(2)=\frac{a-b-8}{2}$이므로

$\frac{a-b-8}{2}=-6$에서 $a-b=-4$, $23-b=-4$

$b=27$

따라서 $g(x)=\begin{cases}f(x)+2x & (x<-1)\\ -f(x)-2x+23 & (-1\le x<2)\\ f(x)+2x+27 & (x\ge 2)\end{cases}$이므로

$g(1)=-f(1)-2+23=-\left(-\frac{1}{2}\right)+21=\frac{43}{2}$

$g(3)=f(3)+6+27=-\frac{5}{2}+33=\frac{61}{2}$

그러므로 $g(1)+g(3)=\frac{43}{2}+\frac{61}{2}=52$

17. 정답 16

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ (a, b, c, d, e는 상수, $a\neq0$)이라

하면 조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}=\frac{1}{2}$이므로 $a=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x^2}=\frac{1}{2}$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $e=0$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^4+bx^3+cx^2+dx}{2x^2}$$
$$=\frac{1}{2}\times\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{2}x^2+bx+c+\frac{d}{x}\right)=\frac{1}{2}$$

이므로 $c=1$, $d=0$

그러므로 $f(x)=\frac{1}{2}x^4+bx^3+x^2$이다.

조건 (나)에서 $0<x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)+x_1^2<f(x_2)+x_2^2$이므로 $g(x)=f(x)+x^2$이라 하면

함수 $g(x)$는 열린구간 $(0,\ \infty)$에서 증가하는 함수이다.

함수 $g(x)$는 열린구간 $(0,\ \infty)$에서 증가하기 위한 필요조건은 $x>0$일 때, $g'(x)\geq0$이다.

$g'(x)=f'(x)+2x=2x^3+3bx^2+2x+2x=x(2x^2+3bx+4)$

에서 $x>0$이므로 $2x^2+3bx+4\geq0$

$h(x)=2x^2+3bx+4$라 하면 $x>0$일 때 이차부등식 $h(x)\geq0$이 성립하기 위해서는 $x>0$일 때 이차함수 $y=h(x)$의 그래프가 x축과 접하거나 x축보다 위쪽에 있어야 한다.

(ⅰ) $b>0$일 때

이차함수 $y=h(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-\frac{3}{4}b<0$이고 $h(0)=4>0$이므로 $x>0$일 때 $h(x)>0$이 성립한다.

(ⅱ) $b<0$일 때

이차함수 $y=h(x)$의 그래프의 축의 방정식은

$x=-\frac{3}{4}b>0$이므로 $x>0$일 때 함수 $h(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같아야 한다.

즉, $h\left(-\frac{3}{4}b\right)=4-\frac{9}{8}b^2\geq0$에서 $b^2\leq\frac{32}{9}$이므로

$-\frac{4\sqrt{2}}{3}\leq b<0$ 이때 $-\frac{4\sqrt{2}}{3}<b<0$이면 함수 $h(x)$의 최솟값이 0보다 크므로 $x>0$일 때 $h(x)>0$이다. 또한

$b=-\frac{4\sqrt{2}}{3}$이면 $x=\sqrt{2}$에서만 $h(x)=0$이고, $x=\sqrt{2}$를 제외한 모든 실수 x에서 $h(x)>0$이다.

(ⅲ) $b=0$일 때

$h(x)=2x^2+4$이므로 $x>0$일 때 $h(x)>0$이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $b=-\frac{4\sqrt{2}}{3}$일 때 $x=\sqrt{2}$에서만

$g'(x)=0$이고 $x=\sqrt{2}$를 제외한 모든 양의 실수 x에서

$g'(x)>0$이므로 $x>0$일 때 함수 $g(x)$가 증가한다. 그러므로 함수 $g(x)$가 $x>0$일 때 증가하기 위한 필요충분조건은 $b\geq-\frac{4\sqrt{2}}{3}$이다.

$f(\sqrt{2})=4+2\sqrt{2}b\geq4+2\sqrt{2}\times\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)=-\frac{4}{3}$

따라서 $f(\sqrt{2})$의 최솟값은 $m=-\frac{4}{3}$이므로 $9m^2=9\times\left(-\frac{4}{3}\right)^2=16$

18. **정답** 35

$f(x)=x^4-\frac{8}{3}x^3-2x^2+8x+2$에서

$f'(x)=4x^3-8x^2-4x+8=4(x+1)(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

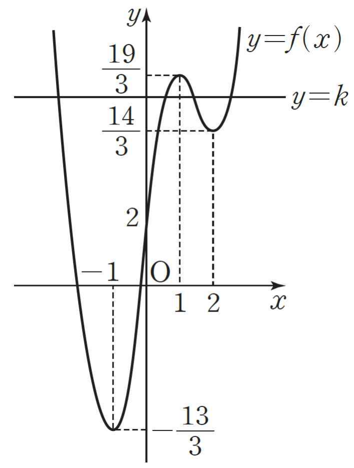
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

$f(-1)=1+\frac{8}{3}-2-8+2=-\frac{13}{3}$

$f(1)=1-\frac{8}{3}-2+8+2=\frac{19}{3}$

$f(2)=16-\frac{64}{3}-8+16+2=\frac{14}{3}$



이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

한편, 함수 $y=g(x)$, 즉 $y=|f(x)-k|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동한 그래프의 x축의 아래 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

이때 방정식 $f'(x)=0$의 근이 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$이므로 함수 $g(x)$의 $x=a$에서의 미분계수가 0인 x의 값은 -1, 1, 2뿐이다.

또한 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축이 점 $(t,\ g(t))$에서 접하지 않고 만난다고 하면 함수 $g(x)$는 $x=t$에서 미분가능하지 않고

$$\lim_{h\to0-}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=-\lim_{h\to0+}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}$$

집합 $A=\left\{x\ \middle|\ \lim_{h\to0-}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+\lim_{h\to0+}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=0\right\}$

의 원소 α에 대하여 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하면

$$\lim_{h\to0-}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}+\lim_{h\to0+}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}=g'(\alpha)+g'(\alpha)$$
$$=2g'(\alpha)=0$$

$g'(\alpha)=0$이므로 $-1\in A$, $1\in A$, $2\in A$

함수 $g(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하지 않으면

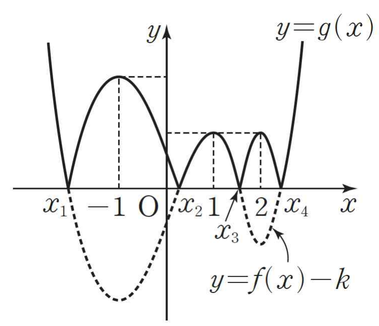
$$\lim_{h\to0-}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}+\lim_{h\to0+}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}=0$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}=-\lim_{h\to0+}\frac{g(\alpha+h)-g(\alpha)}{h}$$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축이 접하지 않고 만나는 점의 x좌표는 집합 A의 원소이다.

이때 $n(A)=7$이려면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축이 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로 $\frac{14}{3}<k<\frac{19}{3}$이어야 한다.

그림과 같이 $\frac{14}{3}<k<\frac{19}{3}$일 때 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 네 점의 x좌표를 x_1, x_2, x_3, x_4 $(x_1<-1<x_2<1<x_3<2<x_4)$라 하면



$A=\{x_1,\ -1,\ x_2,\ 1,\ x_3,\ 2,\ x_4\}$

$g(x_1)=g(x_2)=g(x_3)=g(x_4)=0$이므로 집합 $B=\{g(x)|x\in A\}$에 대하여 $n(B)=3$이려면 세 함숫값 $g(-1),\ g(1),\ g(2)$ 중 두 함숫값이 서로 같아야 한다.

이때 $\frac{14}{3}<k<\frac{19}{3}$이므로 세 함숫값 $g(-1),\ g(1),\ g(2)$ 중 두 함숫값이 서로 같은 경우는 $g(-1)\neq g(1)=g(2)$일 때뿐이고, 이 경우에 집합 B는 $B=\{g(x_1),\ g(-1),\ g(1)\}$이다.

$g(1)=|f(1)-k|=\left|\frac{19}{3}-k\right|=\frac{19}{3}-k$,

$g(2)=|f(2)-k|=\left|\frac{14}{3}-k\right|=k-\frac{14}{3}$

이므로 $g(1)=g(2)$에서

$\frac{19}{3}-k=k-\frac{14}{3}$, $2k=11$, $k=\frac{11}{2}$

그러므로 $g(x)=|f(x)-k|=\left|f(x)-\frac{11}{2}\right|$ 이고

$g(-1)=\left|f(-1)-\frac{11}{2}\right|=\left|-\frac{13}{3}-\frac{11}{2}\right|=\frac{59}{6}$

$g(1)=\left|f(1)-\frac{11}{2}\right|=\left|\frac{19}{3}-\frac{11}{2}\right|=\frac{5}{6}$

즉, $B=\left\{0,\ \frac{5}{6},\ \frac{59}{6}\right\}$이므로 집합 B의 모든 원소의 합은

$0+\frac{5}{6}+\frac{59}{6}=\frac{32}{3}$

따라서 $p=3,\ q=32$이므로

$p+q=3+32=35$

19. 정답 108

함수 $y=k-f(-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프이다.

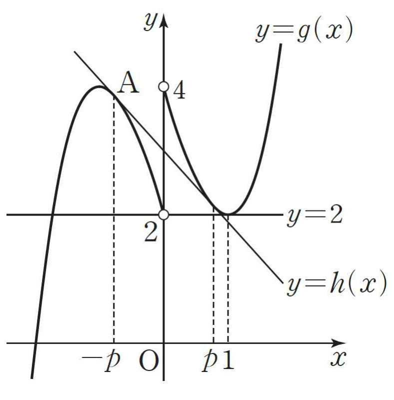
$f(x)=(x+2)(x-1)^2$에서

$f'(x)=(x-1)^2+2(x+2)(x-1)=3(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

이때 $x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=4$를 갖고, 함수 $y=k-f(-x)$는 $x=1$에서 극솟값 $k-4$를 갖는다.

문제의 조건을 만족시키려면 그림과 같이 $k-4=f(0)=2$, 즉 $k=6$이어야 한다.



이때 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(-p,\ f(-p))$에서의 접선이 곡선 $y=6-f(-x)$ 위의 점 $(p,\ 6-f(-p))$에서 접한다.

두 점 $(-p,\ f(-p))$, $(p,\ 6-f(-p))$를 지나는 직선의 기울기가 $f'(-p)$이므로

$f'(-p)=\frac{6-f(-p)-f(-p)}{p-(-p)}$

$pf'(-p)=3-f(-p)$ …… ㉠

$f(x)=x^3-3x+2$, $f'(x)=3x^2-3$이므로 ㉠에서

$p(3p^2-3)=3-(-p^3+3p+2)$, $2p^3=1$, $p=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

따라서 $(k\times p)^3=\left(\frac{6}{\sqrt[3]{2}}\right)^3=\frac{216}{2}=108$

20. [정답] ④

21. [정답] ③

22. [정답] 2

[해설]

$h(x)=x^3-3x+8$이라 하면 $f(x)=|h(x)|$

$h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

극댓값은 $h(-1)=10$이고 극솟값은 $h(1)=6$이다. $y=h(x)$의 극솟값이 양수이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만난다.

즉 방정식 $h(x)=0$은 한 개의 실근 $x=a$를 갖고,

$f(x)=\begin{cases}-h(x) & (x<a)\\ h(x) & (x\geq a)\end{cases}$이다.

방정식 $f(t)=f(t+2)$의 해를 구하자.

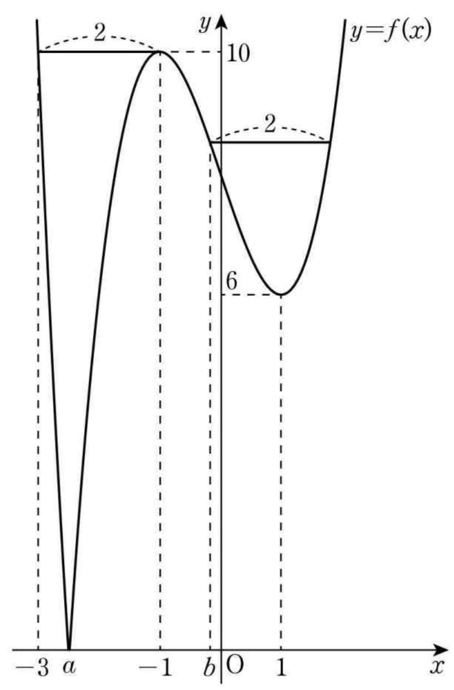
$a-2<t<a$일 때, $-t^3+3t-8=(t+2)^3-3(t+2)+8$

$t^3+3t^2+3t+9=(t+3)(t^2+3)=0$에서 $t=-3$

$t\leq a-2$ 또는 $t\geq a$일 때,

$t^3-3t+8=(t+2)^3-3(t+2)+8$, $3t^2+6t+1=0$에서

$t=\frac{-3\pm\sqrt{6}}{3}$이다. $\frac{-3+\sqrt{6}}{3}=b$라 하면 $b>-1$



$t<-3$일 때, 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값이 $f(t)$이므로 $g(t)=f(t)$이다.

$-3\leq t\leq -1$일 때, 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값이 $f(-1)=10$이므로 $g(t)=10$이다.

$-1<t\leq b$일 때, 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값이

$f(t)$이므로 $g(t)=f(t)$이다.

$b<t$일 때, 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값이 $f(t+2)$이므로 $g(t)=f(t+2)$이다.

즉 함수 $g(t)$는 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases} -t^3+3t-8 & (t<-3) \\ 10 & (-3\leq t\leq -1) \\ t^3-3t+8 & (-1<t\leq b) \\ t^3+6t^2+9t+10 & (b<t) \end{cases}$$

$$\lim_{t\to -3-}g(t)=10=g(-3)=\lim_{t\to -3+}g(t)$$

$$\lim_{t\to -1-}g(t)=10=g(-1)=\lim_{t\to -1+}g(t)$$

$$\lim_{t\to b-}g(t)=g(b)=\lim_{t\to b+}g(t)$$

이므로 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$$\lim_{t\to -3-}\frac{g(t)-g(-3)}{t-(-3)}=\lim_{t\to -3-}\frac{(t+3)(-t^2+3t-6)}{t+3}$$
$$=\lim_{t\to -3-}(-t^2+3t-6)=-24$$

$$\lim_{t\to -3+}\frac{g(t)-g(-3)}{t-(-3)}=0$$

이므로 $g(t)$는 $t=-3$에서 미분가능하지 않다.

$$\lim_{t\to -1-}\frac{g(t)-g(-1)}{t-(-1)}=0$$

$$\lim_{t\to -1+}\frac{g(t)-g(-1)}{t-(-1)}=\lim_{t\to -1+}\frac{(t+1)(t^2-t-2)}{t+1}$$
$$=\lim_{t\to -1+}(t^2-t-2)=0$$

이므로 $g(t)$는 $t=-1$에서 미분가능하다.

$$\lim_{t\to b-}\frac{g(t)-g(b)}{t-b}=\lim_{t\to b-}\frac{(t-b)(t^2+bt+b^2-3)}{t-b}$$
$$=\lim_{t\to b-}(t^2+bt+b^2-3)=3b^2-3$$

$$\lim_{t\to b+}\frac{g(t)-g(b)}{t-b}=\lim_{t\to b+}\frac{(t-b)\{t^2+(6+b)t+b^2+6b+9\}}{t-b}$$
$$=\lim_{t\to b+}\{t^2+(6+b)t+b^2+6b+9\}$$
$$=3b^2+12b+9$$

$b>-1$이므로 $3b^2-3\neq 3b^2+12b+9$

즉 $g(t)$는 $t=b$에서 미분가능하지 않다.

그러므로 $\alpha=-3$, $\beta=\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$이고 $\alpha\beta=3-\sqrt{6}$

따라서 $m=3$, $n=-1$이므로 $m+n=2$

23. **정답** 114

$|g(x)|=f(x)$이므로 $g(x)=f(x)$ 또는 $-f(x)$, 그리고 $f(x)\geq 0$

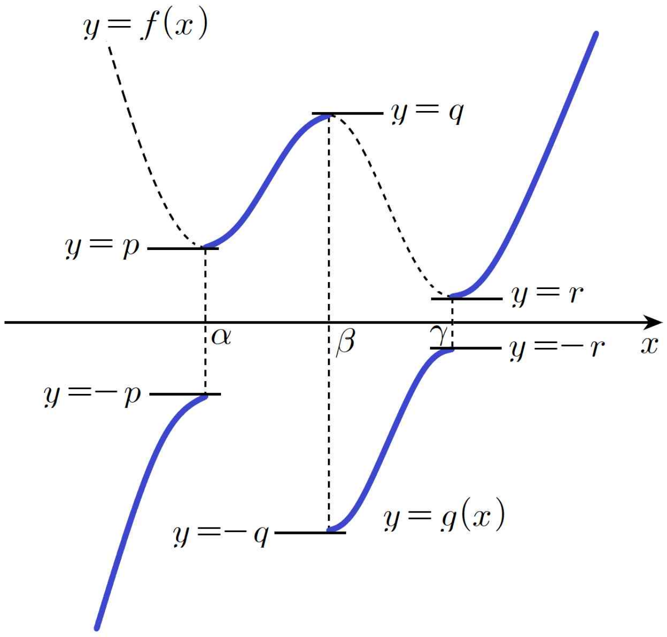
$\displaystyle\lim_{t\to 0+}\frac{g(x+t)-g(x)}{t}=|f'(x)|$이므로 $g'(x)=|f'(x)|$,

$g'(x)\geq 0$

$y=g(x)$는 증가함수이다.

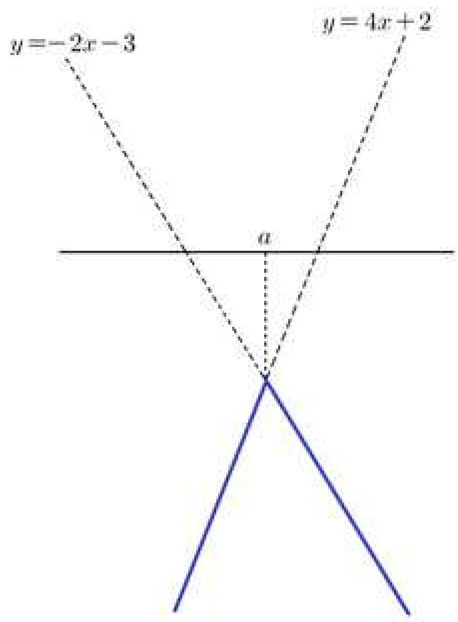
$y=g(x)$는 증가함수이어야 하고, $g(x)=\pm f(x)$이므로

$y=f(x)\geq 0$이므로 x축 위에 그려지고, $g(x)$는 감소구간을 가질 수 없으므로 아래 그림과 같이 $f(x)$를 선택해야 한다.



위의 그림과 같이 세 점에서 α, β, γ에서 불연속이 된다.

$h(x)=\begin{cases} 4x+2 & (x<a) \\ -2x-3 & (x\geq a) \end{cases}$의 그래프가 아래 그림과 같이 연속일 때,



$y=g(x)h(x)$에서 $x=\alpha$, β, γ에서 연속이기 위해

$h(\alpha)=0$이거나

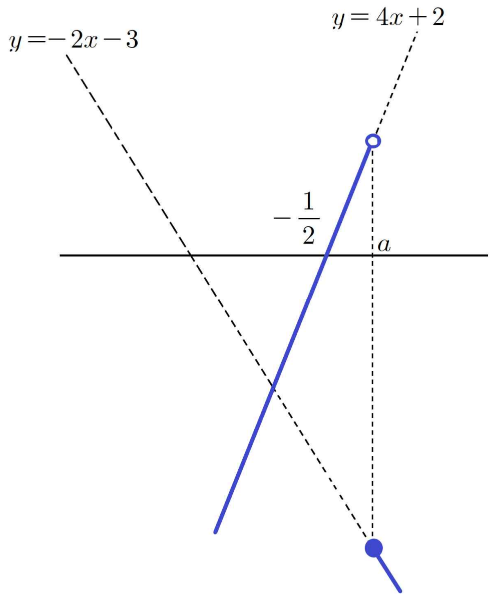
$ph(\alpha)=-ph(\alpha)$, $qh(\beta)=-qh(\beta)$, $rh(\gamma)=-rh(\gamma)$

이어야 한다. 세 점에서 모두 위의 조건을 만족할 수 없으므로 $y=h(x)$가 연속일 수 없다.

(ⅰ) $a<-\dfrac{3}{2}$일 때,

$a=\dfrac{1}{2}$이므로 $a<-\dfrac{3}{2}$일 수 없다.

(ⅱ) $a>-\dfrac{1}{2}$일 때,



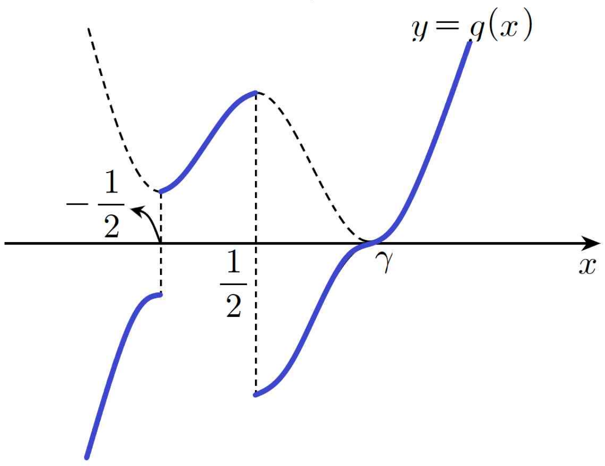
$y=g(x)$의 세 점에서 가 연속이 되기 위해
$ph(\alpha)=-ph(\alpha)$, $qh(\beta)=-qh(\beta)$, $rh(\gamma)=-rh(\gamma)$이 성립하기 위해 $h(x)$의 값이 하나의 함수일 때, 같아 질수 없다. 그러므로 $x=a$일 때, $k(4a+2)=-k(-2a-3)$을 만족하는 값이 존재한다.

$4a+2=2a+3$, $a=\frac{1}{2}$일 때, $y=g(x)h(x)$는 연속이 된다.

그리고 $h(x)=0$이 되는 점 $x=-\frac{1}{2}$일 때, $y=g(x)h(x)$가 연속이다.

연속이 가능한 점들의 대소 관계에 따라

$\alpha=-\frac{1}{2}$이고 $\beta=\frac{1}{2}$이면, $x=\gamma$에서 $y=g(x)$가 연속이어야 하므로 $g(\gamma)=0$이어야 한다.



위의 그림에 따라 $f'(x)=16\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-\gamma)$라 할 때,

$f'(x)=16\left(x^2-\frac{1}{4}\right)(x-\gamma)=16x^3-16\gamma x^2-4x+4\gamma$

$f(x)=4x^4-\frac{16}{3}\gamma x^3-2x^2+4\gamma x+C$

$g(0)=\frac{40}{3}$이므로 $C=\frac{40}{3}$,

$f(x)=4x^4-\frac{16}{3}\gamma x^3-2x^2+4\gamma x+\frac{40}{3}$

$f(\gamma)=0$이므로 $4\gamma^4-\frac{16}{3}\gamma^4-2\gamma^2+4\gamma^2+\frac{40}{3}=0$

$-\frac{4}{3}\gamma^4+2\gamma^2+\frac{40}{3}=0$, $2\gamma^4-3\gamma^2-20=0$, $(2\gamma^2+5)(\gamma^2-4)=0$

$\gamma^2=4$이고 $\gamma>\frac{1}{2}$이므로 $\gamma=2$

$\therefore\ f(x)=4x^4-\frac{32}{3}x^3-2x^2+8x+\frac{40}{3}$,

$f(1)=4-\frac{32}{3}-2+8+\frac{40}{3}=\frac{38}{3}$, $g(1)=-\frac{38}{3}$,

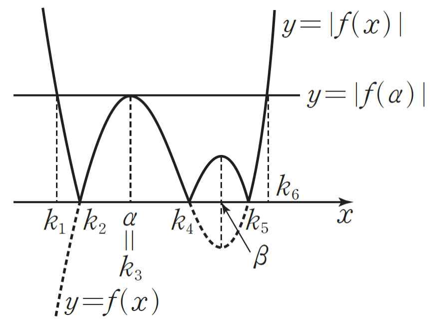
$h(3)=-2\times3-3=-9$

$\therefore\ g(1)\times h(3)=\left(-\frac{38}{3}\right)\times(-9)=114$

24. **정답** 7

조건 (가)에서 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $\alpha<\beta$인 두 실수 α, β에 대하여 $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소이다.

조건 (나)에서
$f(\alpha)f(\beta)<0$이므로
$f(\alpha)>0$, $f(\beta)<0$이고,
$f(\alpha)+f(\beta)>0$이므로
$|f(\alpha)|>|f(\beta)|$이다.
그러므로 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $|f(x)|=|f(k)|$의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프가 직선 $y=|f(k)|$와 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로 $|f(k)|=0$ 또는 $|f(k)|=|f(\alpha)|$ 이어야 한다.
따라서 k_1, k_2, k_3, $\cdots$, k_m은 함수 $y=|f(x)|$의 그래프가 직선 $y=0$ 또는 직선 $y=|f(\alpha)|$와 만나는 점들이 x좌표이므로 $m=6$이다.
$k_1<k_2<k_3<\cdots<k_6$이므로 $\alpha=k_3$
$|f(k_1)|=|f(k_3)|=|f(k_6)|=|f(\alpha)|$
$|f(k_2)|=|f(k_4)|=|f(k_5)|=0$
이때 $f(k_1)=-f(\alpha)$, $f(k_3)=f(k_6)=f(\alpha)$이므로

$$\sum_{i=1}^{m}f(k_1)=\sum_{i=1}^{6}f(k_1)$$
$$=f(k_1)+f(k_2)+f(k_3)+f(k_4)+f(k_5)+f(k_6)$$
$$=-f(\alpha)+0+f(\alpha)+0+0+f(\alpha)=f(\alpha)$$

따라서 $m=6$, $n=1$이므로
$m+n=6+1=7$

TH①. 넓이 [3,4점]

출제 : 10번,11번,19번(주관식 마지막 3점)

[Prediction] 30%

넓이문항은 최대한 간단하게 해결해야 한다.

2025학년도 경찰대학교

2025 Trend

1. 함수 $f(x)=x^3+6x^2+13x+8$의 역함수를 $g(x)$라고 하자. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $y=-x+8$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 36 ② 40 ③ 44
④ 48 ⑤ 52

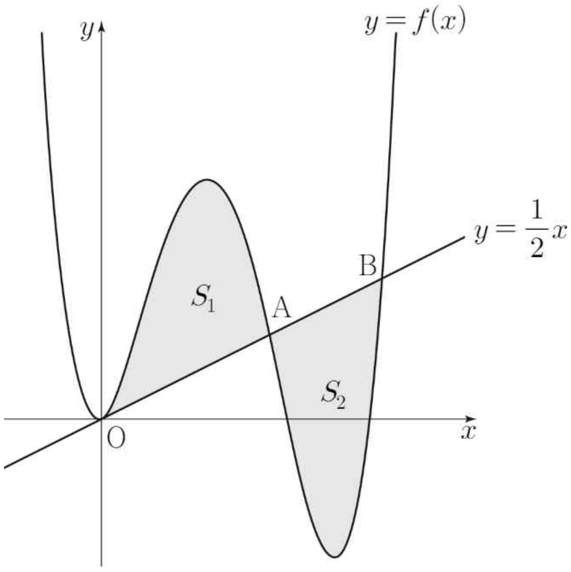
2024년 수능특강 Lv2

2025학년도 경찰대학교 유사문제

2. 함수 $f(x)=\frac{2}{7}x^3+x-\frac{16}{7}$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 두 함수 $y=g(x)$, $y=|x|$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{27}{14}$ ② 2 ③ $\frac{29}{14}$
④ $\frac{15}{7}$ ⑤ $\frac{31}{14}$

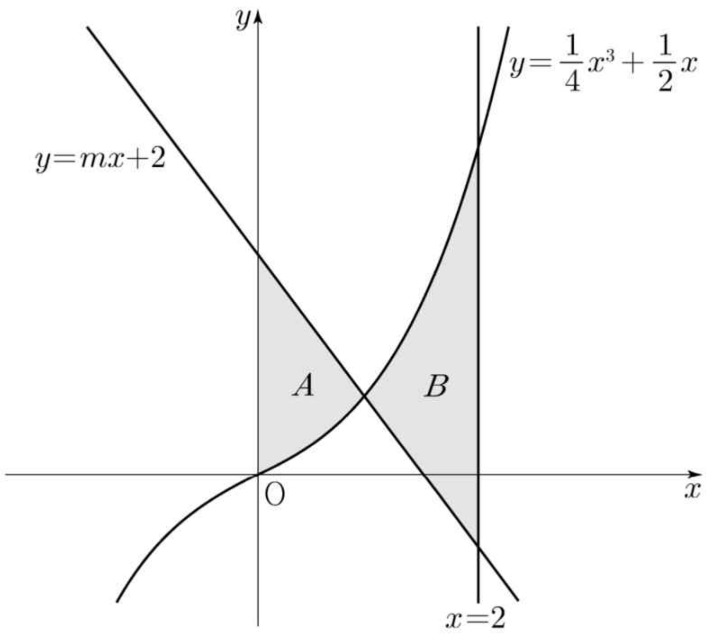
3. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 원점 O에서 접하고 x좌표가 양수인 두 점 A, B ($\overline{\mathrm{OA}}<\overline{\mathrm{OB}}$)에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OA로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 선분 AB로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_2라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{5}$이고 $S_1=S_2$일 때, $f(1)$의 값은?



① $\frac{9}{2}$　② $\frac{11}{2}$　③ $\frac{13}{2}$
④ $\frac{15}{2}$　⑤ $\frac{17}{2}$

4. 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 직선 $y=mx+2$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 두 직선 $y=mx+2$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $B-A=\frac{2}{3}$일 때, 상수 m의 값은? (단, $m<-1$)

① $-\frac{3}{2}$　② $-\frac{17}{12}$　③ $-\frac{4}{3}$
④ $-\frac{5}{4}$　⑤ $-\frac{7}{6}$



5. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-2x+6 & (x<0) \\ -x^2+2x+6 & (x\geq 0) \end{cases}$$

의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점을 P, Q라 하고, 상수 k $(k>4)$에 대하여 직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 R이라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=k$ 및 선분 QR로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=2B$일 때, k의 값은? (단, 점 P의 x좌표는 음수이다.)

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

6. 함수 $f(x)=x^2+1$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 점 $(1,\ f(1))$을 지나고 기울기가 m $(m\geq 2)$인 직선이 이등분할 때, 상수 m의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

7. 네 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 1)$, $\mathrm{C}(0,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형 OABC가 있다. $-1 < t < 1$인 실수 t에 대하여 곡선

$$y = x^2 + t \ (0 \le x \le 1)$$

위의 x좌표가 0, 1인 점을 각각 P, Q라 하고 점 Q에서 y축에 내린 수선의 발을 R이라 할 때, 곡선

$$y = x^2 + t \ (0 \le x \le 1)$$

과 두 선분 PR, QR로 둘러싸인 부분의 내부와 사각형 OABC의 내부의 공통부분의 넓이를 $S(t)$라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

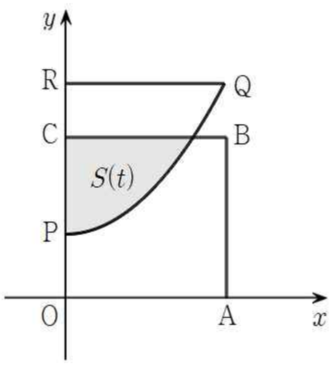
| 보기 |

ㄱ. $S(0) = \frac{2}{3}$

ㄴ. $-1 < \alpha < 0$인 모든 실수 α에 대하여 $S(\alpha) + S(1+\alpha) = \frac{2}{3}$이다.

ㄷ. $S\left(-\frac{1}{2}\right) + S\left(\frac{1}{2}\right) + S(\beta) = 1$을 만족시키는 모든 실수 $\beta\ (-1 < \beta < 1)$의 값의 곱은 $\sqrt[3]{\frac{1}{16}} - \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



공식 활용

8. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = x(x+2)(x-k)$$

라 하고, 함수 $g(x)$를

$$g(x) = f(x) + |f(x)|$$

라 하자. 함수 $y = g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 6이 되도록 하는 k의 값은?

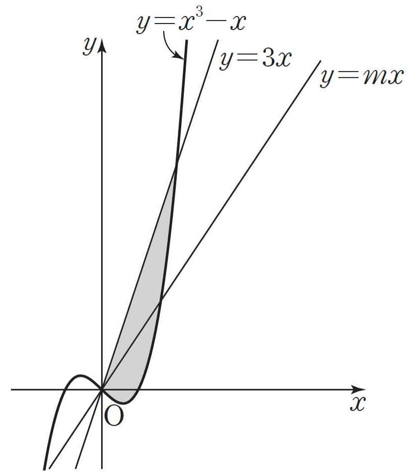
① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

9. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(6)$의 값은?

> (가) 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근 a, 1, b $(a<1<b)$ 를 갖고, a, 1, b는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
> (나) 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 128이다.

① 42 ② 45 ③ 48
④ 51 ⑤ 54

10. 그림과 같이 $x \geq 0$에서 곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=3x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $y=mx$가 이등분할 때, 상수 m의 값은? (단, $0<m<3$) [4점]



① $2(\sqrt{2}-1)$ ② $3-\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{2}-1$
④ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}+1$

TH②. 운동 [3,4점]

출제 : 10번,11번,19번(주관식 마지막 3점)

[Prediction] 30%

운동 문항도 역시 최대한 간단한 식으로 해결해야 한다.

2025학년도 사관학교

11. 두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 A(9)와 점 B(1)에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도는 각각

$$v_1(t)=6t^2-18t+7,\ v_2(t)=2t+1$$

이다. 시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(t)$의 최댓값은?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

2024년 7월 교육청모의고사

12. 양수 a에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t(a-t)$$

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 16이고, 시각 $t=2a$에서 점 P의 위치는 0이다. 시각 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는?

① 54 ② 58 ③ 62
④ 66 ⑤ 70

13. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = -3t^2 + at,\ v_2(t) = -t+1$$

이다. 출발한 후 두 점 P, Q가 한 번만 만나도록 하는 양수 a에 대하여 점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=3$까지 움직인 거리는?

① $\frac{29}{2}$ ② 15 ③ $\frac{31}{2}$

④ 16 ⑤ $\frac{33}{2}$

14. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = \begin{cases} -t^2+t+2 & (0 \leq t \leq 3) \\ k(t-3)-4 & (t > 3) \end{cases}$$

이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각에서의 점 P의 위치가 1일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

15. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(0 \le t \le 1)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = -\left|t-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2},\ v_2(t) = -kt(t-1)\ (k>1)$$

이다. $0<t\le 1$에서 두 점 P, Q가 오직 한 번 만나도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $1<k<\alpha$ 또는 $k=\beta$이다. $\alpha+\beta$의 값은? (단, α, β는 상수이다.)

① $\dfrac{11+2\sqrt{3}}{6}$ ② $\dfrac{6+\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{13+2\sqrt{3}}{6}$

④ $\dfrac{7+\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\dfrac{15+2\sqrt{3}}{6}$

16. 자연수 k에 대하여 두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 $\mathrm{A}(k)$와 점 $\mathrm{B}(2k)$에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 t $(t \ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 3t^2-12t+k,\ v_2(t) = -2t-4$$

이다. 두 점 P, Q가 출발한 후 한 번만 만나도록 하는 k의 최솟값을 구하시오.

TH③. 적분 [4점]

2025학년도 경찰대학교

2025 Trend

17. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{0}^{4} f(x)dx$의 값을 구하시오.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $(f'(x)+2)(f'(x)-2)=x(x-4)$ 이다. (나) $f(0)<f(4)$, $f(2)=1$

2025학년도 사관학교 (22번)

2025 Trend

18. 함수 $f(x)=x^2-2x$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\{h(x)-f(x)\}\{h(x)-g(x)\}=0$이다. (나) $h(k)h(k+2)\leq 0$을 만족시키는 서로 다른 실수 k의 개수는 3이다.

$\int_{-3}^{2} h(x)dx=26$이고 $h(10)>80$일 때, $h(1)+h(6)+h(9)$의 값을 구하시오.

2025학년도 9월 평가원모의고사
2025 Trend

19. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여

$$2k-8 \le \frac{f(k+2)-f(k)}{2} \le 4k^2+14k$$

를 만족시킬 때, $f'(3)$의 값을 구하시오.

TH④. 정적분으로 표현된 함수 [4점]

2025학년도 경찰대학교
2025 Trend

20. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x<1) \\ a-a|x-2| & (x \ge 1) \end{cases}$$

이라 하자. 양수 b에 대하여 함수

$$g(x)=|x(x-2)|\int_b^x f(t)dt$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 최댓값은?

① $\frac{14}{3}$ ② $\frac{29}{6}$ ③ 5

④ $\frac{31}{6}$ ⑤ $\frac{16}{3}$

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 상수 k $(k \geq 0)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} 2x-k & (x \leq k) \\ f(x) & (x > k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하다.
(나) 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}dt \geq 0$$이고

$$\int_3^x g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}dt \geq 0$$이다.

$g(k+1)$의 최솟값은?

① $4-\sqrt{6}$ ② $5-\sqrt{6}$ ③ $6-\sqrt{6}$
④ $7-\sqrt{6}$ ⑤ $8-\sqrt{6}$

22. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x f(t)dt = 2x^3 + \int_0^{-x} f(t)dt$를 만족시킨다. $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

23. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+3x+a & (x<0) \\ 3x+a & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 함수

$$g(x)=\int_{-4}^{x} f(t)dt$$

가 $x=2$에서 극솟값을 가질 때, 함수 $g(x)$의 극댓값은?

① 18 ② 20 ③ 22

④ 24 ⑤ 26

24. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_{1}^{x} tf(t)\,dt+\int_{-1}^{x} tg(t)\,dt=3x^4+8x^3-3x^2$

(나) $f(x)=xg'(x)$

$\int_{0}^{3} g(x)\,dx$의 값은?

① 72 ② 76 ③ 80

④ 84 ⑤ 88

2024년 10월 교육청모의고사

2025 Trend

25. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^2 = 2\int_3^x (t^2+2t)f(t)\,dt$$

를 만족시킬 때, $\int_{-3}^0 f(x)\,dx$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값을 구하시오.

2024년 수능특강 Lv3

2025 Trend

26. 닫힌구간 $[0,\,4]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $0 \le x < 2$일 때 $|f(x)| = |x-1|$, $2 \le x \le 4$일 때 $|f(x)| = |x-3|$을 만족시킨다. 열린구간 $(0,\,4)$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \int_1^x f(t)dt + \int_3^x f(t)dt$$

라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. 가능한 함수 f의 개수는 16이다.

ㄴ. $|g(2)|+|g'(2)|=2$

ㄷ. 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$ $(1<\alpha<4)$에서만 극값을 가지고 $g(\alpha)>0$일 때, $\alpha+g(\alpha)=4$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

27. 다음 조건을 만족시키는 실수 전체의 집합에서 연속인 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{-2}^{2} f(x)dx$의 최댓값과 최솟값의 합은?

(가) 모든 실수 x에 대하여
$\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}=x^4-3x^2+1$이다.
(나) $x \leq 1$인 모든 실수 x에 대하여
$f(x)-\int_{1}^{x} f(t)dt \geq 0$이다.

① $-\frac{8}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{16}{3}$

2024년 수능특강 Lv3
2025 Trend

28. 최고차항의 계수의 절댓값이 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \leq 0) \\ f(x+3) & (x > 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 모든 실수 x에 대하여

$$\int_{0}^{x} g(t)dt \leq 0$$

을 막족시킬 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $g(0)=0$
ㄴ. $g'(0)$이 존재하면 모든 실수 x에 대하여
$\int_{0}^{x} |g'(t)|dt = -g(x)$이다.
ㄷ. $\int_{n}^{1} f(x)dx$의 값이 정수일 때, $\lim_{h \to 0+} \frac{g(h)}{h}$의 최솟값은
$-\frac{99}{14}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

29. 음수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & (x<1)\\ a|x-2|-a & (x\geq 1)\end{cases}$$

이라 할 때, 함수 $g(x)=|x|\int_b^x f(t)dt$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 b의 최댓값을 M이라 하자. $b=M$일 때의 함수 $g(x)$에 대하여 $g(3)=18$일 때, $12M$의 값을 구하시오.

30. 함수 $f(x)=\int_0^x (2x-t)(3t^2+at+b)dt$와 도함수 $f'(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 정수 a와 실수 b에 대하여 $\left|\frac{a}{b}\right|$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $f'(1)=0$

(나) 열린구간 $(0,\ 1)$에 속하는 모든 실수 k에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(k)$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

31. 최고차항의 계수가 양수이고 $f(0)=f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{-x}^{x} f(|t|)dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(2)=0$
> (나) 함수 $g(x)$의 모든 극솟값의 합은 -1이다.

$f(3)$의 값은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

2024년 수능완성

32. 최고차항의 계수가 양수이고 $f(-1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_{-1}^{1} f(t)dt\times\int_{-1}^{x} f(t)dt$$

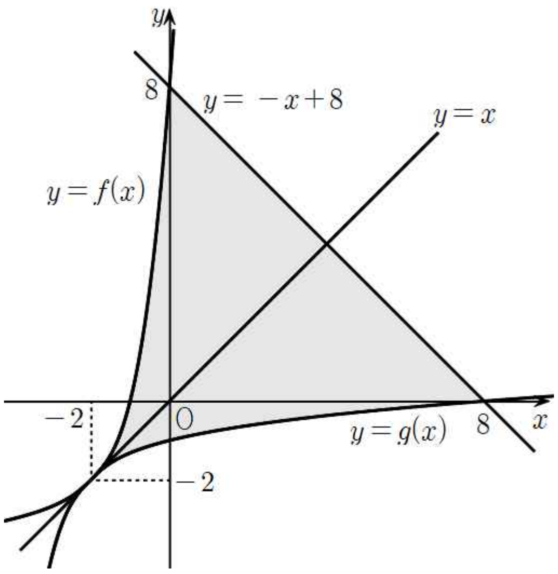
가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le g(2)$이다.
> (나) 실수 k에 대하여 x에 대한 방정식 $g(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(k)$라 할 때,
> $\left|\lim_{k\to a+} h(k)-\lim_{k\to a-} h(k)\right|=2$를 만족시키는 실수 a의 값은 3뿐이다.

$30\times g(0)$의 값을 구하시오. [4점]

1. [정답] ②

[해설]



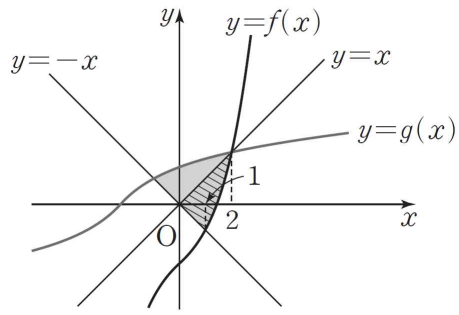
방정식 $x^3+6x^2+13x+8=x$, $(x+2)^3=0$에서 $x=-2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 위의 그림과 같다.
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$, y축으로 둘러싸인 넓이와 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=x$, x축으로 둘러싸인 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=2\times\int_{-2}^{0}(x^3+6x^2+13x+8-x)dx+\frac{1}{2}\times8\times8$$
$$=2\left[\frac{1}{4}x^4+2x^3+6x^2+8x\right]_{-2}^{0}+32$$
$$=2(-28+32)+32$$
$$=40$$

2. 정답 ⑤

풀이

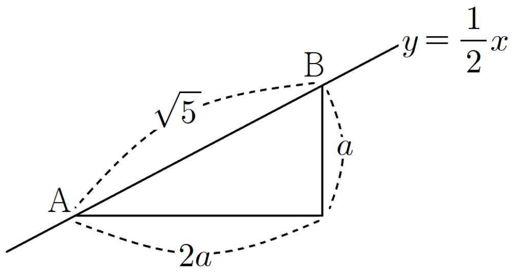
$f(x)=\frac{2}{7}x^3+x-\frac{16}{7}$에서 $f'(x)=\frac{6}{7}x^2+1>0$이므로
함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.
두 함수 $y=f(x)$, $y=x$의 그래프의 교점의 x좌표를 구해 보자.
$\frac{2}{7}x^3+x-\frac{16}{7}=x$, $x^3=8$
$(x-2)(x^2+2x+4)=0$ …… ㉠
이차방정식 $x^2+2x+4=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$D_1=4-16=-12<0$
이므로 이 이차방정식은 실근을 갖지 않는다.
그러므로 ㉠에서 $x=2$
두 함수 $y=f(x)$, $y=-x$의 그래프의 교점의 x좌표를 구해 보자.
$\frac{2}{7}x^3+x-\frac{16}{7}=-x$, $x^3+7x-8=0$
$(x-1)(x^2+x+8)=0$ …… ㉡
이차방정식 $x^2+x+8=0$의 판별식을 D_2라 하면
$D_2=1-32=-31<0$
이므로 이 이차방정식은 실근을 갖지 않는다.
그러므로 ㉡에서 $x=1$
그러므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 두 함수 $y=g(x)$, $y=|x|$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 세 함수 $y=f(x)$, $y=x$, $y=-x$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.
따라서 구하는 넓이는

$$\int_{0}^{1}\{x-(-x)\}dx+\int_{1}^{2}\left\{x-\left(\frac{2}{7}x^3+x-\frac{16}{7}\right)\right\}dx$$
$$=\int_{0}^{1}2xdx+\int_{1}^{2}\left(-\frac{2}{7}x^3+\frac{16}{7}\right)dx$$
$$=\left[x^2\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{1}{14}x^4+\frac{16}{7}x\right]_{1}^{2}$$
$$=1+\frac{17}{14}=\frac{31}{14}$$

3. 정답 ⑤



기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 선분AB를 빗변으로 하는 직각삼각형의 밑변과 높이의 비는 $2:1$이고, 위의 그림과 같다. 피타고라스 정리에 따라 $5a^2=5$이므로 $a=1$, A의 x좌표를 α라 할 때, B의 x좌표는 $\alpha+2$

$f(x)=\frac{1}{2}x$의 실근이 α, $\alpha+2$와 0이 중근

$f(x)=x^2(x-\alpha)(x-\alpha-2)+\frac{1}{2}x$

$f(x)=x^4-2(\alpha+1)x^3+(\alpha^2+2\alpha)x^2+\frac{1}{2}x$

$S_1=S_2$이므로 $\int_{0}^{\alpha+2}\left\{f(x)-\frac{1}{2}x\right\}dx=0$

$$\int_{0}^{\alpha+2}\{x^4-2(\alpha+1)x^3+(\alpha^2+2\alpha)x^2\}dx$$
$$=\left[\frac{x^5}{5}-\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)x^4+\left(\frac{\alpha^2+2\alpha}{3}\right)x^3\right]_{0}^{\alpha+2}=0$$
$$=\frac{(\alpha+2)^5}{5}-\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)^4}{2}+\frac{\alpha(\alpha+2)^4}{3}=0$$
$$\frac{\alpha+2}{5}-\frac{\alpha+1}{2}+\frac{\alpha}{3}=0,\ \frac{6\alpha+12-15\alpha-15+10\alpha}{30}=0$$
$\alpha-3=0$, $\alpha=3$

$\therefore\ f(x)=x^2(x-3)(x-5)+\frac{1}{2}x$,

$\therefore\ f(1)=1\times(-2)\times(-4)+\frac{1}{2}=8+\frac{1}{2}=\frac{17}{2}$

4. [정답] ③

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 공통범위 13 [4.00점]

[해설]

$f(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$, $g(x)=mx+2$라 하고 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표를 t $(0<t<2)$라 하면 주어진 그림에서

$$A=\int_0^t\{g(x)-f(x)\}dx,\ B=\int_t^2\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$\begin{aligned}\therefore\ B-A&=\int_t^2\{f(x)-g(x)\}dx-\int_0^t\{g(x)-f(x)\}dx\\&=\int_t^2\{f(x)-g(x)\}dx+\int_0^t\{f(x)-g(x)\}dx\\&=\int_0^2\{f(x)-g(x)\}dx\\&=\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x-mx-2\right)dx\\&=\left[\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}x^2-\frac{m}{2}x^2-2x\right]_0^2\\&=1+1-2m-4\\&=-2m-2\end{aligned}$$

따라서 $B-A=\frac{2}{3}$에서

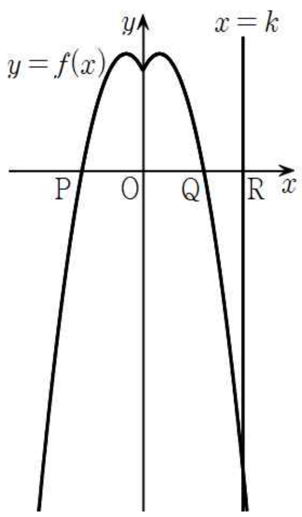
$$-2m-2=\frac{2}{3},\qquad m=-\frac{4}{3}$$

5. [정답] ④

[해설]

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+6 & (x<0)\\ -x^2+2x+6 & (x\geq 0)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-(x+1)^2+7 & (x<0)\\ -(x-1)^2+7 & (x\geq 0)\end{cases}$$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=k$ 및 세 점 P, Q, R는 다음과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 선분 OP 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 선분 OQ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

따라서 $A=2B$, 즉 $\frac{A}{2}=B$에서

$$\int_0^k(-x^2+2x+6)dx=0$$

$$\int_0^k(-x^2+2x+6)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+6x\right]_0^k$$
$$=-\frac{1}{3}k^3+k^2+6k$$

$-\frac{1}{3}k^3+k^2+6k=0$에서 $\quad -\frac{1}{3}k(k-6)(k+3)=0$

$\therefore\ k=6\ (\because\ k>4)$

6. [정답] ②

[해설]

함수 $f(x)=x^2+1$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라 하면

$$A=\int_0^1(x^2+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

점 $(1,\ f(1))$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y-f(1)=m(x-1)$, $y=mx-m+2$

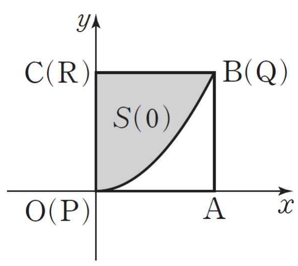
세 점 $(1,\ f(1))$, $(1,\ 0)$, $\left(1-\frac{2}{m},\ 0\right)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 $\frac{A}{2}$이므로 $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{m}\times2$

$m=3$

7. **정답** ⑤

풀이

ㄱ. $t=0$일 때, 곡선 $y=x^2$ $(0\leq x\leq 1)$과 두 선분 PR, QR로 둘러싸인 부분의 내부와 사각형 OABC의 내부의 공통부분은 [그림 1]과 같다.



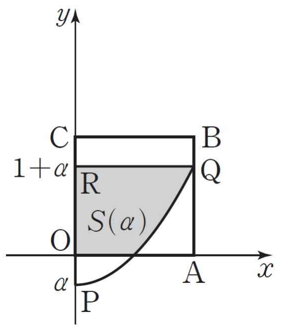
[그림 1]

따라서

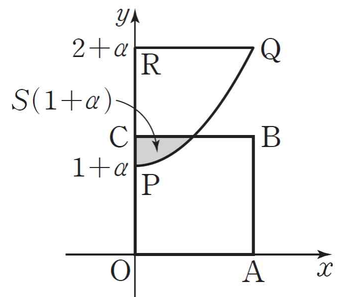
$$S(0)=\int_0^1(1-x^2)dx$$
$$=\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)-0=\frac{2}{3}\ (\text{참})$$

ㄴ. $-1<\alpha<0$인 α에 대하여 $S(\alpha)$의 값은 [그림 2]의 색칠한 부분의 넓이와 같다. 또한 $S(1+\alpha)$의 값은 [그림 3]의 색칠한

부분의 넓이와 같다.



[그림 2]



[그림 3]

곡선 $y=x^2+\alpha$를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이 곡선 $y=x^2+\alpha+1$이므로 곡선 $y=x^2+\alpha$ $(0\le x\le 1)$과 x축 (직선 $y=0$) 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=x^2+\alpha+1$ $(0\le x\le 1)$과 직선 $y=1$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

따라서 $S(\alpha)+S(1+\alpha)$의 값은 곡선 $y=x^2$ $(0\le x\le 1)$과 두 선분 OC, CB로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로 ㄱ에 의하여

$S(\alpha)+S(1+\alpha)=\dfrac{2}{3}$ (참)

ㄷ. ㄴ에 의하여

$S\left(-\dfrac{1}{2}\right)+S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{3}$

$S\left(-\dfrac{1}{2}\right)+S\left(\dfrac{1}{2}\right)+S(\beta)=1$에서

$S(\beta)=\dfrac{1}{3}$

ㄱ에서 $S(0)=\dfrac{2}{3}$이므로 $\beta\ne 0$

(ⅰ) $0<\beta<1$인 경우

$0<t<1$일 때, 곡선 $y=x^2+t$ $(0\le x\le 1)$과 직선 $y=1$이 만나는 점의 x좌표는

$x^2+t=1$에서 $x^2=1-t$, $x>0$이므로

$x=\sqrt{1-t}$

따라서

$$S(t)=\int_0^{\sqrt{1-t}}\{1-(x^2+t)\}dx$$
$$=\left[(1-t)x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{1-t}}$$
$$=(1-t)\sqrt{1-t}-\frac{1}{3}(1-t)\sqrt{1-t}$$
$$=\frac{2}{3}(1-t)\sqrt{1-t}$$

$S(\beta)=\dfrac{2}{3}(1-\beta)\sqrt{1-\beta}=\dfrac{1}{3}$에서

$(\sqrt{1-\beta})^3=\dfrac{1}{2}$, $\sqrt{1-\beta}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$

$1-\beta=\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$, 즉 $\beta=1-\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$

(ⅱ) $-1<\beta<0$인 경우

$S(\beta)=\dfrac{1}{3}$이면 ㄴ에서 $S(1+\beta)=\dfrac{1}{3}$이고

(ⅰ)에서 $1+\beta=1-\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$ 이므로 $\beta=-\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$

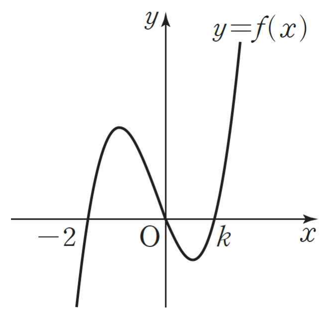
(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 β의 값의 곱은

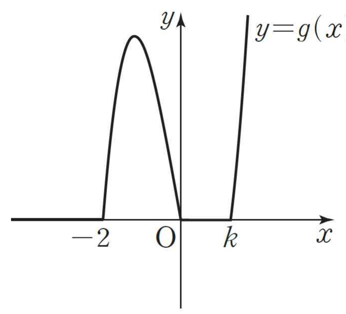
$-\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\times\left(1-\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\right)=\sqrt[3]{\dfrac{1}{16}}-\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

8. **정답** ②

함수 $g(x)$가 $g(x)=\begin{cases}2f(x) & (f(x)\ge 0)\\ 0 & (f(x)<0)\end{cases}$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.





그러므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-2}^{0}2f(x)dx=2\int_{-2}^{0}\{x^3+(2-k)x^2-2kx\}dx$$
$$=2\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2-k}{3}x^3-kx^2\right]_{-2}^{0}$$
$$=2\left\{0-\left(4+\frac{8k-16}{3}-4k\right)\right\}$$
$$=\frac{8}{3}k+\frac{8}{3}$$

$\dfrac{8}{3}k+\dfrac{8}{3}=6$이므로 $\dfrac{8}{3}k=\dfrac{10}{3}$

따라서 $k=\dfrac{5}{4}$

9. **정답** ②

방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근 a, 1, b $(a<1<b)$ 를 갖고, a, 1, b는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$b-1=1-a=d$ $(d>0)$이라 하면

$f(x)=(x-1+d)(x-1)(x-1-d)$

한편, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 곡선 $y=f(x+1)$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

$f(x+1)=x(x+d)(x-d)=x^3-d^2x$이고 곡선 $y=f(x+1)$은 원점에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x+1)$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-d}^{0}(x^3-d^2x)dx+\int_0^d(-x^3+d^2x)dx$$
$$=2\int_0^d(-x^3+d^2x)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{d^2}{2}x^2\right]_0^d$$
$$=2\left(-\frac{d^4}{4}+\frac{d^4}{2}\right)=\frac{d^4}{2}$$

$\dfrac{d^4}{2}=128$, 즉 $d^4=256$에서 $d>0$이므로 $d=4$

따라서 $f(x)=(x+3)(x-1)(x-5)$이므로

$f(6)=9\times5\times1=45$

10. 정답 ③

곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=3x$가 만날 때,

$x^3-x=3x$에서 $x^3-4x=0,\ x(x+2)(x-1)=0$

$x>0$에서 곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=3x$가 만나는 점의 x좌표는 2이므로 $x\geq 0$에서 곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=3x$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^2\{3x-(x^3-x)\}dx=\int_0^2(4x-x^3)dx$$
$$=\left[2x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^2$$
$$=8-4=4$$

곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=mx$가 만날 때,

$x^3-x=mx$에서 $x(x^2-x-m)=0$

$x>0$에서 곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=mx$가 만나는 점의 x좌표는 $\sqrt{m+1}$이므로 $x\geq 0$에서 곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=mx$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^{\sqrt{m+1}}\{mx-(x^3-x)\}dx=\int_0^{\sqrt{m+1}}\{(m+1)x-x^3\}dx$$
$$=\left[\frac{m+1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_0^{\sqrt{m+1}}$$
$$=\frac{(m+1)^2}{2}-\frac{(m+1)^2}{4}$$
$$=\frac{(m+1)^2}{4}$$

$\frac{(m+1)^2}{4}=\frac{1}{2}\times4=2$에서 $(m+1)^2=8$

$0<m<3$이므로 $m+1=2\sqrt{2}$

따라서 $m=2\sqrt{2}-1$

11. [정답] ③

12. [정답] ②

[해설]

시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하자.

$$x(t)=x(0)+\int_0^t v(t)dt$$
$$=16+\int_0^t 3t(a-t)dt$$
$$=16+\int_0^t(-3t^2+3at)dt$$
$$=16+\left[-t^3+\frac{3}{2}at^2\right]_0^t$$
$$=-t^3+\frac{3}{2}at^2+16$$

시각 $t=2a$에서 점 P의 위치가 0이므로

$$x(2a)=-(2a)^3+\frac{3}{2}a\times(2a)^2+16$$
$$=16-2a^3=0$$

$a^3=8,\ a=2$

$v(t)=3t(2-t)=-3t^2+6t$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=5$까지

점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^5|v(t)|dt$$
$$=\int_0^5|-3t^2+6t|dt$$
$$=\int_0^2(-3t^2+6t)dt+\int_2^5(3t^2-6t)dt$$
$$=\left[-t^3+3t^2\right]_0^2+\left[t^3-3t^2\right]_2^5$$
$$=\{(-8+12)-0\}+\{(125-75)-(8-12)\}$$
$$=58$$

13. [정답] ①

[해설]

출발한 후 두 점 P, Q가 만나는 시각을 $t=k\ (k>0)$이라 하자.

$$\int_0^k(-3t^2+at)dt-\int_0^k(-t+1)dt=0$$
$$\int_0^k\{(-3t^2+at)-(-t+1)\}dt=0$$
$$-k^3+\frac{a+1}{2}k^2-k=0,\ k\left(k^2-\frac{a+1}{2}k+1\right)=0$$

이차방정식 $k^2-\frac{a+1}{2}k+1=0$이 양수인 근을 가지고 근과 계수와의 관계에서 두 근의 곱이 1이므로 이차방정식의 판별식 D에 대하여 $D=0$이다.

$$D=\left(\frac{a+1}{2}\right)^2-4=0,\ a=3$$

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3|v_1(t)|dt=\int_0^3|-3t^2+3t|dt$$
$$=\int_0^1(-3t^2+3t)dt+\int_1^3(3t^2-3t)dt$$
$$=\frac{29}{2}$$

14. [정답] 16

[출처]	2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 공통범위 19 [3.00점]

[해설]

속도 $v(t)$가

$$v(t)=\begin{cases}-t^2+t+2 & (0\leq t\leq 3)\\ k(t-3)-4 & (t>3)\end{cases}$$

방정식 $-t^2+t+2=0$에서 $-(t-2)(t+1)=0$

$t=2$ 또는 $t=-1$

처음으로 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각 $t=2$이다.

따라서 두 번째로 운동 방향이 바뀌는 시각은

방정식 $k(t-3)-4=0$에서 $\quad t=\frac{4}{k}+3$

$t=\frac{k}{4}+3$에서의 점 P의 위치가 1이므로

$$\int_0^3(-t^2+t+2)dt+\int_3^{\frac{4}{k}+3}(kt-3k-4)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^3+\left[\frac{k}{2}t^2-3kt-4t\right]_3^{\frac{4}{k}+3}$$

$$=\left(-9+\frac{9}{2}+6\right)+\left\{\frac{k}{2}\left(\frac{4}{k}+3\right)^2-3k\left(\frac{4}{k}+3\right)-4\left(\frac{4}{k}+3\right)-\left(\frac{9k}{2}-9k-12\right)\right\}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{8}{k}=1$$

$\therefore\ k=16$

15. **정답** ⑤

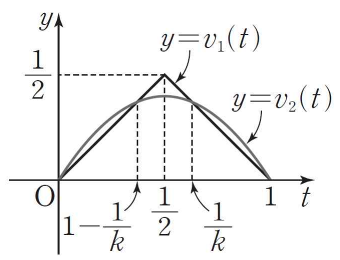
풀이

시각 $t=t_1$ $(0<t_1\le 1)$에서 두 점 P, Q의 위치가 같으면

$0+\int_0^{t_1}v_1(t)dt=0+\int_0^{t_1}v_2(t)dt$

$\int_0^{t_1}\{v_1(t)-v_2(t)\}dt=0$

이때 두 함수 $y=v_1(t)$, $y=v_2(t)$의 그래프가 다음 그림과 같이 서로 다른 네 점에서 만나야 한다



$0\le t\le\frac{1}{2}$일 때, 곡선 $y=-kt(t-1)$과 직선 $y=t$의 교점의 t좌표를 구하면

$t=-kt(t-1)$

$t(kt-k+1)=0$

$t=0$ 또는 $t=1-\frac{1}{k}$

두 함수 $y=v_1(t)$, $y=v_2(t)$의 그래프는 모두 직선 $t=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로 나머지 교점의 t좌표는 각각 $\frac{1}{k}$, 1이다.

$f(x)=\int_0^x\{v_1(t)-v_2(t)\}dt$라 하면 두 점 P, Q의 위치가 같도록 하는 시각 t의 값은 방정식 $f(x)=0$의 실근과 같다. 그러므로 $0<t\le 1$에서 두 점 P, Q가 오직 한 번 만나려면 $0<x\le 1$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근이 오직 하나이어야 한다.

$0<x<1$일 때, $f'(x)=v_1(x)-v_2(x)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=1-\frac{1}{k}$ 또는 $x=\frac{1}{k}$

$0\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$1-\frac{1}{k}$	$\cdots$	$\frac{1}{k}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	극소	↗	극대	↘	

따라서 $0<x\le 1$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근이 오직 하나이려면

$f\left(\frac{1}{k}\right)=0$ 또는 $f(1)>0$

(ⅰ) $f\left(\frac{1}{k}\right)=0$인 경우

$$f\left(\frac{1}{k}\right)=\int_0^{\frac{1}{k}}\{v_1(t)-v_2(t)\}dt$$
$$=\int_0^{\frac{1}{k}}v_1(t)dt-\int_0^{\frac{1}{k}}v_2(t)dt=0$$

에서

$$\int_0^{\frac{1}{k}}v_1(t)dt=\int_0^{\frac{1}{k}}v_2(t)dt$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}tdt+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{k}}(1-t)dt=\int_0^{\frac{1}{k}}(-kt^2+kt)dt$$

$$\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[t-\frac{1}{2}t^2\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{k}}=\left[-\frac{k}{3}t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_0^{\frac{1}{k}}$$

$$\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)=-\frac{1}{3k^2}+\frac{1}{2k}$$

$3k^2-6k+2=0$

$k>1$이므로 $k=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

(ⅱ) $f(1)>0$인 경우

$f(1)=2f\left(\frac{1}{2}\right)$이고 $f(1)>0$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)>0$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}\{v_1(t)-v_2(t)\}dt$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}v_1(t)dt-\int_0^{\frac{1}{2}}v_2(t)dt$$
$$=\frac{1}{8}-\left[-\frac{k}{3}t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{8}-\left(-\frac{k}{24}+\frac{k}{8}\right)$$
$$=\frac{1}{8}-\frac{k}{12}>0$$

에서 $k<\frac{3}{2}$

$k>1$이므로 $1<k<\frac{3}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\frac{3+\sqrt{3}}{3}>\frac{3}{2}$이므로

$1<k<\frac{3}{2}$ 또는 $k=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$

따라서 $\alpha=\frac{3}{2}$, $\beta=\frac{3+\sqrt{3}}{3}$이므로

$\alpha+\beta=\frac{15+2\sqrt{3}}{6}$

16. 정답 5

시각 t에서 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$$\begin{aligned} x_1(t)&=k+\int_0^t v_1(t)dt \\ &=k+\int_0^t (3t^2-12t+k)dt \\ &=k+\left[t^3-6t^2+kt\right]_0^t \\ &=t^3-6t^2+kt+k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(t)&=2k+\int_0^t v_2(t)dt \\ &=2k+\int_0^t (-2t-4)dt \\ &=2k+\left[-t^2-4t\right]_0^t \\ &=-t^2-4t+2k \end{aligned}$$

$x_1(t)=x_2(t)$에서

$t^3-6t^2+kt+k=-t^2-4t+2k$

$t^3-5t^2+(k+4)t-k=0$

$(t-1)(t^2-4t+k)=0$

$x_1(1)=x_2(1)$이므로 두 점 P, Q는 시각 $t=1$일 때 만난다.

이때 두 점 P, Q가 출발한 후 한 번만 만나려면 t에 대한 이차방정식 $t^2-4t+k=0$의 실근이 존재하지 않거나 양수인 실근이 존재한다면 그 실근은 $t=1$뿐어야 한다.

이차방정식 $t^2-4t+k=0$의 실근이 존재하는 경우 실근이 모두 음수일 수는 없고, $t=1$을 실근으로 갖는 경우 $k=3$이므로 $t=3$도 실근으로 갖게 되어 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

그러므로 이차방정식 $t^2-4t+k=0$의 실근이 존재하지 않아야 하고 이차방정식 $t^2-4t+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-k<0$이어야 하므로 $k>4$

따라서 구하는 자연수 k의 최솟값은 5이다.

17. [정답] 4

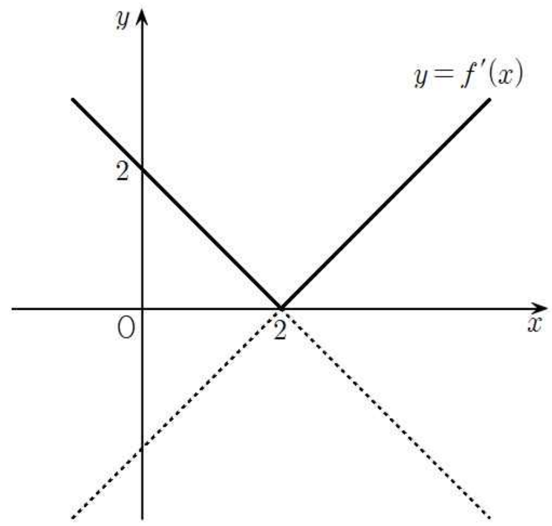
[해설]

실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 조건 (가)의 식 $\{f'(x)+2\}\{f'(x)-2\}=x(x-4)$에서

$$\{f'(x)\}^2-(x-2)^2=0$$
$$\{f'(x)-x+2\}\{f'(x)+x-2\}=0$$
$$\therefore\ f'(x)=x-2 \text{ 또는 } f'(x)=-x+2$$

따라서 (나)의 조건을 만족하는 도함수 $f'(x)$는 다음과 같다.

$$f'(x)=\begin{cases} -x+2 & (x<2) \\ x-2 & (x\geq 2) \end{cases}$$



이므로

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2+2x+C_1 & (x<2) \\ \frac{1}{2}x^2-2x+C_2 & (x\geq 2) \end{cases}$$

$f(2)=1$ 이므로 $C_1=-1$, $C_2=3$

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2+2x-1 & (x<2) \\ \frac{1}{2}x^2-2x+3 & (x\geq 2) \end{cases}$$

따라서 $\int_0^4 f(x)\,dx$ 에서

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)\,dx&=\int_0^2\left(-\frac{1}{2}x^2+2x-1\right)dx \\ &=\left[-\frac{1}{6}x^3+x^2-x\right]_0^2 \\ &=\left(-\frac{8}{6}+4-2\right)-0=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_2^4 f(x)\,dx&=\int_2^4\left(\frac{1}{2}x^2-2x+3\right)dx \\ &=\left[\frac{1}{6}x^3-x^2+3x\right]_2^4 \\ &=\left(\frac{64}{6}-16+12\right)-\left(\frac{8}{6}-4+6\right)=\frac{10}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore\ \int_0^4 f(x)\,dx=\frac{2}{3}+\frac{10}{3}=4$$

18. [정답] 156

19. [정답] 31

[해설]

부등식 $2k-8\leq\frac{f(k+2)-f(k)}{2}\leq 4k^2+14k$ …… ㉠

에서 $2k-8=4k^2+14k$를 만족하는 k의 값을 구하면

$4k^2+12k+8=0$, $(k+1)(k+2)=0$

$k=-2$ 또는 $k=-1$

k의 값을 부등식 ㉠에 대입하면

$k=-2$일 때, $-12\leq\frac{f(0)-f(-2)}{2}\leq -12$

$\therefore\ f(0)-f(-2)=-24$ …… ㉡

$k=-1$ 일 때, $\quad -10 \le \dfrac{f(1)-f(-1)}{2} \le -10$

$\therefore\ f(1)-f(-1)=-20$ …… ㉢

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$ 는 상수)

라 하자. ㉡, ㉢에서

$f(0)-f(-2)=-4a+2b+8$ 이므로 $\quad -4a+2b+8=-24$

$f(1)-f(-1)=2+2b$ 이므로 $\quad 2+2b=-20$

위 두 식을 연립하면 $\quad a=\dfrac{5}{2},\ b=-11$

$f(x)=x^3+\dfrac{5}{2}x^2-11x+c$ 이므로

$f'(x)=3x^2+5x-11$

$\therefore\ f'(3)=3\times 3^2+5\times 3-11=31$

20. [정답] ⑤

[해설]

함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x<1) \\ a-a|x-2| & (x\ge 1)\end{cases}$ 에 대하여

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(x^2-1)=0$$

$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(a-a|x-2|)=0$$

$f(1)=0$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 따라서 함수 $\displaystyle\int_b^x f(t)\,dt$ 는 미분가능한 함수이다.

$\displaystyle\int_b^x f(t)\,dt=F(x)$ 라 하자.

$F(b)=0,\ F'(x)=f(x)$

이므로 함수 $g(x)=|x(x-2)|\displaystyle\int_b^x f(t)\,dt$ 에서

$g(x)=|x(x-2)|F(x)$

이다.

$$g(x)=\begin{cases} x(x-2)F(x) & (x<0) \\ x(2-x)F(x) & (0\le x<2) \\ x(x-2)F(x) & (x\ge 2)\end{cases}$$

함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0,\ x=2$ 에서 미분가능하다.

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{x(x-2)F(x)}{x}=-2F(0)$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x(2-x)F(x)}{x}=2F(0)$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$ 이므로

$-2F(0)=2F(0),\quad F(0)=0,\quad \displaystyle\int_b^0 f(t)\,dt=0$

$\therefore\ \displaystyle\int_0^b f(t)\,dt=0$

$x=2$ 에서

$$\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{x(2-x)F(x)}{x-2}=-2F(2)$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{x(x-2)F(x)}{x-2}=2F(2)$$

$\displaystyle\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$ 이므로

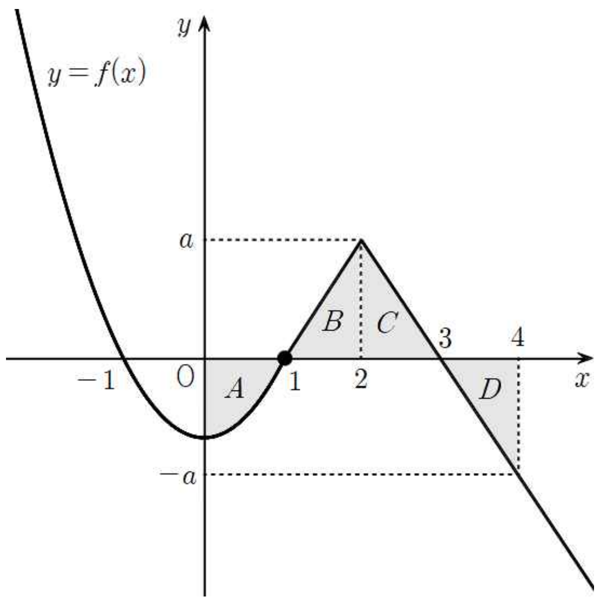
$-2F(2)=2F(2),\quad F(2)=0,\quad \displaystyle\int_b^2 f(t)\,dt=0$

$\therefore\ \displaystyle\int_2^b f(t)\,dt=0$

$\displaystyle\int_0^b f(t)\,dt=0,\ \int_b^2 f(t)\,dt=0$ 이므로

$$\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^b f(t)\,d+\int_b^2 f(t)\,dt=0$$

이다.



$\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt=0$ 이므로 위의 그림에서 두 영역 $A,\ B$ 의 넓이가 같다.

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{6}\times 2^3=\dfrac{a}{2}\quad \therefore\ a=\dfrac{4}{3}$

위의 그림에서 색칠한 네 영역 $A,\ B,\ C,\ D$ 의 넓이가 같으므로

$\displaystyle\int_2^b f(t)\,dt=0$ 이고, $b>0$ 인 실수 b 는

$b=2$ 또는 $b=4$

따라서 $a+b$ 의 최댓값은 $a=\dfrac{4}{3},\ b=4$ 일 때 $\dfrac{16}{3}$ 이다.

21. [정답] ②

[출처]	2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 공통범위 15 [4.00점]

[해설]

최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 와 상수 k ($k\ge 0$) 에 대하여

$$g(x)=\begin{cases} 2x-k & (x\le k) \\ f(x) & (x>k)\end{cases}$$

일 때 조건 (가)에서 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하고

미분가능하므로 $x=k$에서 연속이고 미분가능하다.

즉 $\lim\limits_{x \to k-}(2x-k)=\lim\limits_{x \to k+}f(x)=k$에서 $\quad f(k)=k$

$\lim\limits_{h \to 0-}\dfrac{2(k+h)-k-k}{h}=2$이므로 $\lim\limits_{h \to 0+}\dfrac{f(k+h)-f(k)}{h}=2$ 에서

$f'(k)=2$

즉 $f(x)=(x-k)^3+a(x-k)^2+2(x-k)+k$ (a, b는 상수)라 할 수 있다. …… ㉠

$h(t)=|t(t-1)|+t(t-1)$라 하면

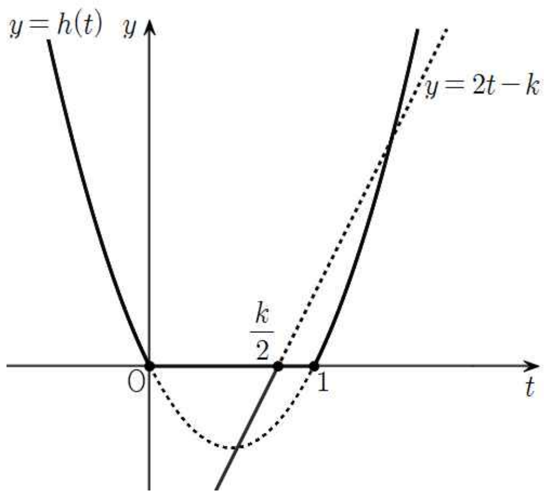
$$h(t)=\begin{cases}2t(t-1) & (t<0 \text{ 또는 } t>1)\\ 0 & (0\le t\le 1)\end{cases}$$

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x g(t)h(t)dt \ge 0$을 만족시키려면 $t<0$ 또는 $t>1$에서 $h(t)>0$이므로

$t<0$에서 $g(t)<0$, $t>1$에서 $g(t)\ge 0$이 성립해야 한다.

즉 $2t-k=0$에서 $t=\dfrac{k}{2}$ 이므로

$0\le \dfrac{k}{2}\le 1, \quad 0\le k\le 2$ …… ㉡



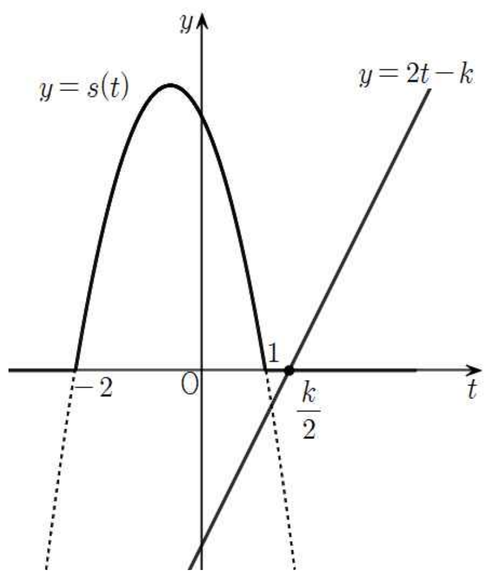
$s(t)=|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)$라 하면

$$s(t)=\begin{cases}0 & (t<-2 \text{ 또는 } t>1)\\ -2(t+2)(t-1) & (-2\le t\le 1)\end{cases}$$

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $\int_3^x g(t)s(t)dt \ge 0$을 만족시키려면 $-2\le t\le 1$에서 $s(t)\ge 0$이므로 $-2\le t\le 1$에서 $g(t)\le 0$이 성립해야 한다.

즉 $2t-k=0$에서 $t=\dfrac{k}{2}$ 이므로

$\dfrac{k}{2}\ge 1, \quad k\ge 2$ …… ㉢



즉 ㉡, ㉢을 모두 만족시키는 실수 k의 값이 2이므로 ㉠에서

$f(x)=(x-2)^3+a(x-2)^2+2(x-2)+2$,

$f'(x)=3(x-2)^2+2a(x-2)+2$

$=3x^2+2(a-6)x-4a+14$

$=3\left(x-\dfrac{6-a}{3}\right)^2+14-4a-\dfrac{(6-a)^2}{3}$

이때 $x\ge 2$일 때 $f'(x)\ge 0$을 만족시켜야 하므로

(ⅰ) $\dfrac{6-a}{3}<2$, 즉 $a>0$일 때

함수 $f'(x)$는 $x=2$에서 최솟값 2를 가지고 $2>0$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) $\dfrac{6-a}{3}\ge 2$, 즉 $a\le 0$일 때

함수 $f'(x)$는 $x=\dfrac{6-a}{3}$에서 최솟값 $14-4a-\dfrac{(6-a)^2}{3}$을 가지므로

$14-4a-\dfrac{(6-a)^2}{3}\ge 0, \quad 6-a^2\ge 0$

즉 $(a+\sqrt{6})(a-\sqrt{6})\le 0$에서

$-\sqrt{6}\le a\le 0$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\quad a\ge -\sqrt{6}$ …… ㉣

$$g(x)=\begin{cases}2x-2 & (x\le 2)\\ (x-2)^3+a(x-2)^2+2x-2 & (x>2)\end{cases}$$

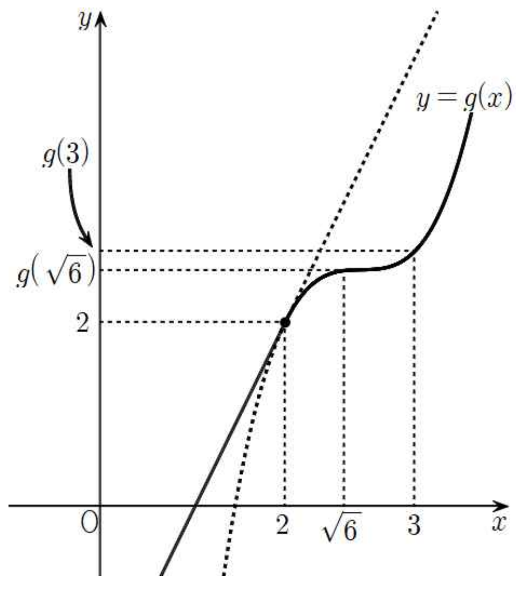
즉 $g(3)=a+5$이므로 ㉣에 의하여

$g(3)\ge 5-\sqrt{6}$

따라서 $g(3)$의 최솟값은 $5-\sqrt{6}$ 이다.

[참고]

$g(3)$의 값이 최소일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



22. **정답** 16

$\int_0^x f(t)dt-\int_0^{-x}f(t)dt=2x^3$, $f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라 할 때,

$F(x)-F(0)-\{F(-x)-F(0)\}=F(x)-F(-x)=2x^3$

$f(x)=3x^2+ax+b$라 할 때, $F(x)=x^3+\dfrac{a}{2}x^2+bx+C$

$F(x)-F(-x)=2x^3+2bx=2x^3$, $b=0$, $f(x)=3x^2+ax$

$f(1)=3+a=5$이므로 $a=2$,

$\therefore\ f(x)=3x^2+2x$, $f(2)=12+4=16$

23. [정답] ⑤

[해설]

$g(x)=\int_{-4}^{x} f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)$이므로

$$g'(x)=\begin{cases} 3x^2+3x+a & (x<0) \\ 3x+a & (x\geq 0) \end{cases}$$

함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$g'(2)=6+a=0$에서 $a=-6$이다.

$$g'(x)=\begin{cases} 3(x+2)(x-1) & (x<0) \\ 3(x-2) & (x\geq 0) \end{cases}$$

$g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$의 극댓값은

$$g(-2)=\int_{-4}^{-2}(3t^2+3t-6)dt=\left[t^3+\frac{3}{2}t^2-6t\right]_{-4}^{-2}=26$$

24. [정답] ①

[해설]

조건 (가)에서 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$x\{f(x)+g(x)\}=12x^3+24x^2-6x$$

$$f(x)+g(x)=12x^2+24x-6$$

조건 (나)에서 $f(x)=xg'(x)$ 이므로

$$xg'(x)+g(x)=12x^2+24x-6$$

이때 $xg'(x)+g(x)=\{xg(x)\}'$ 이므로 위 식의 양변을 적분하면

$$xg(x)=4x^3+12x^2-6x+C\ (C\text{는 적분상수})$$

양변에 $x=0$을 대입하면 $C=0$

$xg(x)=4x^3+12x^2-6x$ 에서 $g(x)=4x^2+12x-6$

$$\therefore \int_{0}^{3}(4x^2+12x-6)\,dx=\left[\frac{4}{3}x^3+6x^2-6x\right]_{0}^{3}$$
$$=72$$

25. [정답] 54

[해설]

$$\{f(x)\}^2=2\int_{3}^{x}(t^2+2t)f(t)\,dt \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $x=3$을 대입하면 $f(3)=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)f'(x)=2(x^2+2x)f(x)$

$2f(x)\{f'(x)-x^2-2x\}=0$

$f(x)=0$ 또는 $f'(x)=x^2+2x$

함수 $f(x)$에 대하여 집합 $A=\{x\,|\,f(x)\neq 0\}$이라 하자. $A=\varnothing$이면 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$A\neq\varnothing$이라 하자.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$g(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+a$ (a는 실수)

라 하자. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 연속이므로 $x\in A$인 모든 x에 대하여 $f(x)=g(x)$이다.

(ⅰ) $g(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지는 경우

함수 $g(x)$의 극댓값은 $g(-2)$이고

$g(-2)=\frac{4}{3}+a>0$

이므로 $g(3)=18+a\neq 0$이다.

함수 $f(x)$, $g(x)$가 연속이므로

$f(3)=\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}g(x)=g(3)=0$

그러므로 $g(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지는 함수 $f(x)$는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지는 경우

함수 $g(x)$의 극댓값 또는 극솟값이 0이다.

$g(-2)=0$일 때, $g(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{4}{3}$

$g(0)=0$일 때, $g(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2$

$f(3)=0$이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{4}{3} & (x<-2) \\ 0 & (x\geq -2) \end{cases} \qquad \cdots\cdots ㉢$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}x^3+x^2 & (x<0) \\ 0 & (x\geq 0) \end{cases} \qquad \cdots\cdots ㉣$$

(ⅲ) $g(x)=0$이 오직 하나의 실근을 가지는 경우

하나의 실근을 α라 하면 함수 $f(x)$, $g(x)$가 연속이므로

$f(\alpha)=\lim_{x\to\alpha}f(x)=\lim_{x\to\alpha}g(x)=g(\alpha)=0$

이고 $f(3)=0$이므로 $\alpha=3$이다.

$g(3)=18+a=0$, $a=-18$

이므로 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-18 \qquad \cdots\cdots ㉤$$

조건을 만족시키는 $f(x)$는 ㉡과 (ⅰ)~(ⅲ)에서 ㉢, ㉣, ㉤이므로

정적분 $\int_{-3}^{0}f(x)\,dx$의 값이 최대가 되는 $f(x)$는 ㉣, 최소가 되는 $f(x)$는 ㉤이다.

$$M-m=\int_{-3}^{0}\left(\frac{1}{3}x^3+x^2\right)dx-\int_{-3}^{0}\left(\frac{1}{3}x^3+x^2-18\right)dx$$
$$=\int_{-3}^{0}18\,dx=54$$

26. 정답 ⑤

풀이

ㄱ. $0\leq x<2$일 때 $|f(x)|=|x-1|$,

$2\leq x\leq 4$일 때 $|f(x)|=|x-3|$에서

$f(1)=0$, $f(3)=0$이다.

닫힌구간 $[0,4]$에서 함수 $f(x)$가 연속함수이므로

$0\leq x<1$일 때, $f(x)=x-1$ 또는 $f(x)=-x+1$

$1 \le x < 2$일 때 $f(x) = x-1$이면,

$2 \le x < 3$일 때 $f(x) = -x+3$ …… ㉠

$1 \le x < 2$일 때 $f(x) = -x+1$이면,

$2 \le x < 3$일 때 $f(x) = x-3$ …… ㉡

$3 \le x \le 4$일 때, $f(x) = x-3$ 또는 $f(x) = -x+3$이다.

그러므로 가능한 함수 f의 개수는 $2\times2\times2=8$이다. (거짓)

ㄴ. ㉠, ㉡에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $1 \le x \le 3$에서 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭성을 이용하면

$\int_1^2 f(t)dt = \int_2^3 f(t)dt$ 이므로

$$g(2) = \int_1^2 f(t)dt + \int_3^2 f(t)dt$$

$$= \int_1^2 f(t)dt - \int_2^3 f(t)dt = 0$$

그러므로 ㄱ에서 구한 8개의 연속함수 $f(x)$에 대하여 $g(2)=0$이다.

한편, $g(x) = \int_1^x f(t)dt + \int_3^x f(t)dt$ 에서

$g'(x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$ …… ㉢

㉢에서 $g'(2) = 2f(2)$이고,

㉠의 경우 $f(2)=1$,

㉡의 경우 $f(2)=-1$이므로

$|g'(2)| = |2f(2)| = 2$

따라서 $|g(2)| + |g'(2)| = 0+2=2$ (참)

ㄷ. ㉢에서 $g'(x) = 2f(x)$이므로

$g'(x)=0$에서 $f(x)=0$

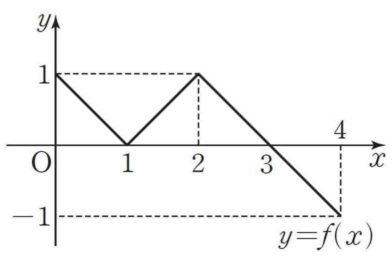
즉, $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $g(x)$가 $x=\alpha$ $(1<\alpha<4)$에서만 극값을 가지므로 $\alpha=3$이다.

$g'(x)=2f(x)$이므로 $x=3$의 좌우에서 함수 $f(x)$의 부호가 바뀌고 $x=1$의 좌우에서 함수 $f(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 한다.

ㄴ에서 $g(2)=0$이므로 $g(\alpha)=g(3)>0$이려면 닫힌구간 $[2, 3]$에서 함수 $g(x)$는 증가해야 하므로 이 구간에서 $f(x) \ge 0$이어야 한다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극대이고

$$g(3) = \int_1^3 f(t)dt + \int_3^3 f(t)dt$$

$$= \int_1^2 f(t)dt + \int_2^3 f(t)dt + 0$$

$$= \int_1^2 (t-1)dt + \int_2^3 (-t+3)dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2 - t\right]_1^2 + \left[-\frac{1}{2}t^2 + 3t\right]_2^3$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

따라서 $\alpha + g(\alpha) = 3 + g(3) = 3+1 = 4$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

27. 정답 ⑤

풀이

조건 (가)의 $\{f(x)+x\}\{f(x)-x\} = x^4 - 3x^2 + 1$ 에서

$\{f(x)\}^2 - x^2 = x^4 - 3x^2 + 1$

$\{f(x)\}^2 = x^4 - 2x^2 + 1$

$\{f(x)\}^2 = (x^2-1)^2$

$f(x) = x^2-1$ 또는 $f(x) = -x^2+1$

이때 두 곡선 $y=x^2-1$, $y=-x^2+1$이 두 점 $(-1, 0)$, $(1, 0)$에서 만나므로 반드시 $f(-1)=0$, $f(1)=0$이다. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)$는 세 구간 $(-\infty, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, \infty)$에서 각각 두 함수 $y=x^2-1$, $y=-x^2+1$ 중 하나를 택하여 정해진다. 그러므로 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 될 수 있는 것은 8개이다.

(ⅰ) $-1<x<1$에서 $f(x)=x^2-1$인 경우

$-1<x<1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<0$이므로

$\int_x^1 f(t)dt < 0$이다.

그러므로 $-1<x<1$에서

$f(x) - \int_1^x f(t)dt = f(x) + \int_x^1 f(t)dt < 0$ 이 되어

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $-1<x<1$에서 $f(x) = -x^2+1$인 경우

(a) $x<-1$에서 $f(x) = -x^2+1$인 경우

$x \le 1$에서 $f(x) = -x^2+1$이므로

$$f(x) - \int_1^x f(t)dt = -x^2+1 - \int_1^x (-t^2+1)dt$$

$$= -x^2+1 - \left[-\frac{1}{3}t^3 + t\right]_1^x$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + \frac{5}{3}$$

이때 $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + \frac{5}{3}\right) = -\infty$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(b) $x<-1$에서 $f(x)=x^2-1$인 경우

$x \le 1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이므로

$\int_x^1 f(t)dt \ge 0$이다.

그러므로 $x \le 1$인 모든 실수 x에 대하여

$f(x) - \int_1^x f(t)dt = f(x) + \int_x^1 f(t)dt \ge 0$ 이 되어 조건 (나)를 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$는 $x<-1$에서 $f(x)=x^2-1$, $-1 \le x < 1$에서 $f(x) = -x^2+1$임을 알 수 있다.

또 $x \ge 1$에서는 $f(x)=x^2-1$ 또는 $f(x)=-x^2+1$이다.

$\int_{-2}^{2} f(x)dx$

$= \int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx$

$= \int_{-2}^{-1} (x^2-1)dx + \int_{-1}^{1} (-x^2+1)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx$

이고, $x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $x^2-1 \geq 0$,

$-x^2+1 \leq 0$이므로 $\int_{-2}^{2} f(x)dx$의 최댓값, 최솟값을 각각

M, m이라 하면

$M = \int_{-2}^{-1} (x^2-1)dx + \int_{-1}^{1} (-x^2+1)dx + \int_{1}^{2} (x^2-1)dx$

$m = \int_{-2}^{-1} (x^2-1)dx + \int_{-1}^{1} (-x^2+1)dx + \int_{1}^{2} (-x^2+1)dx$

따라서

$$M+m = 2\int_{-2}^{-1} (x^2-1)dx + 2\int_{-1}^{1} (-x^2+1)dx + \int_{1}^{2} \{(x^2-1)+(-x^2+1)\}dx$$

$$= 2\times\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-2}^{-1} + 2\times\left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{1} + 0$$

$$= 2\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) + 2\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{8}{3}+\frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

28. **정답** ⑤

풀이

ㄱ. 함수 $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq 0) \\ f(x+3) & (x > 0) \end{cases}$이 실수 전체의 집합에서

연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x \to 0-} g(x) = \lim_{x \to 0+} g(x) = g(0)$ …… ㉠

삼차함수 $f(x)$는 연속함수이고, 함수 $f(x+3)$도 연속 함수이므로

$\lim_{x \to 0-} g(x) = \lim_{x \to 0-} f(x) = f(0)$,

$\lim_{x \to 0+} g(x) = \lim_{x \to 0+} f(x+3) = f(3)$,

$g(0) = f(0)$

이고 ㉠에서

$g(0) = f(0) = f(3)$

그런데 $f(0) > 0$이면 $f(3) > 0$이고 절댓값이 충분히 작은 양수 α에 대하여 닫힌구간 $[3, 3+\alpha]$에 속하는 모든 x에서 $f(x) > 0$이므로

$\int_{0}^{\alpha} g(x)dx = \int_{0}^{\alpha} f(x+3)dx = \int_{3}^{3+\alpha} f(x)dx > 0$이 되어

조건을 만족시키지 않는다.

또 $f(0) < 0$이면 절댓값이 충분히 작은 양수 β에 대하여 닫힌구간 $[-\beta, 0]$에 속하는 모든 x에서 $f(x) < 0$이므로

$\int_{0}^{-\beta} g(x)dx = \int_{0}^{-\beta} f(x)dx = -\int_{-\beta}^{0} f(x)dx > 0$이 되어

조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $f(0) = 0$이므로 $g(0) = f(0) = 0$이다. (참)

ㄴ. ㄱ에서 $g(0) = 0$이므로 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$\int_{0}^{x} g(t)dt \leq 0$을 만족시키려면 $x \leq 0$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x) = f(x) \geq 0$이고 $x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x) = f(x+3) \leq 0$이어야 한다.

이때 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0) = f(3) = 0$이고 $f(x)$의 최고차항의 계수의 절댓값이 1이므로 최고차항의 계수는 음수, 즉 -1이어야 한다.

$x < 0$에서 $f(x) > 0$, $x > 3$에서 $f(x) < 0$이므로 최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$는 $x \leq 0$에서도 감소하고, $x \geq 3$에서도 감소한다. 그러므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

이때 $g'(0)$이 존재하면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 모든 실수 x에 대하여 $g'(x) \leq 0$이다.

따라서 $g'(0)$이 존재하면 모든 실수 x에 대하여

$$\int_{0}^{x} |g'(t)|dt = \int_{0}^{x} \{-g'(t)\}dt$$

$$= \Big[-g(t)\Big]_{0}^{x}$$

$$= -g(x) - \{-g(0)\}$$

$$= -g(x) - 0$$

$= -g(x)$ (참)

ㄷ. ㄱ과 ㄴ의 ㉡에서

$f(x) = -x(x-3)(x-a) = -x^3+(a+3)x^2-3ax$

(a는 $0 \leq a \leq 3$인 실수)

로 놓을 수 있다.

$$\int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{1} \{-x^3+(a+3)x^2-3ax\}dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{a+3}{3}x^3 - \frac{3a}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$

$$= -\frac{7}{6}a + \frac{3}{4}$$

$0 \leq a \leq 3$에서 $-\frac{11}{4} \leq -\frac{7}{6}a + \frac{3}{4} \leq \frac{3}{4}$이므로

$\int_{0}^{1} f(x)dx$의 값이 될 수 있는 정수는 -2, -1, 0이다.

한편, $f'(x) = -3x^2+2(a+3)x-3a$이고 $f(3) = 0$이므로

$$\lim_{h \to 0+} \frac{g(h)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(h+3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$= f'(3) = 3a-9$$

그러므로 $\int_{0}^{1} f(x)dx = -\frac{7}{6}a + \frac{3}{4}$의 값이 최대이면

$\lim_{h \to 0+} \frac{g(h)}{h} = 3a-9$의 값은 최소이다.

즉, $-\frac{7}{6}a + \frac{3}{4} = 0$에서 $a = \frac{9}{14}$일 때 $\lim_{h \to 0+} \frac{g(h)}{h}$의 값이

최소이고 그 최솟값은 $3a-9 = 3\times\frac{9}{14} - 9 = -\frac{99}{14}$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

29. **정답** 54

풀이

함수 $f(x)$에서

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(-x^2+1)=0$,

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(a|x-2|-a)=0$,

$f(1)=a|1-2|-a=0$

이므로 $\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

그러므로 함수 $y=\int_b^x f(t)dt$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

한편, 함수 $y=|x|$는 $x\neq 0$인 모든 실수 x에 대하여 미분가능하다.

따라서 함수 $g(x)=|x|\int_b^x f(t)dt$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=0$에서 미분가능해야 하므로

$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$이어야 한다.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-}=\lim_{x\to 0+}\frac{|x|\int_b^x f(t)dt}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{x\int_b^x f(t)dt}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\int_b^x f(t)dt$$
$$=\int_b^0 f(t)dt$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-}=\lim_{x\to 0-}\frac{|x|\int_b^x f(t)dt}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\frac{-x\int_b^x f(t)dt}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0-}\left\{-\int_b^x f(t)dt\right\}$$
$$=-\int_b^0 f(t)dt$$

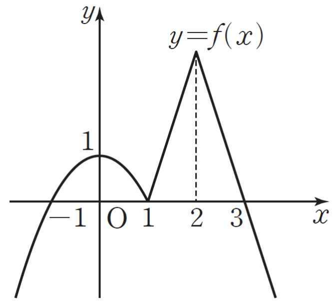
이므로 $\int_b^0 f(t)dt=-\int_b^0 f(t)dt$에서

$\int_b^0 f(t)dt=0$, 즉 $\int_0^b f(t)dt=0$

이어야 한다.

따라서 $h(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하면 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 b는 방정식 $h(x)=0$의 실근이다.

$a<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$h'(x)=f(x)$이므로 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘

$h(3)>h(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$이고 $\lim_{x\to\infty}h(x)=-\infty$이므로

$h(x)=0$이 되는 양수 x는 구간 $(3,\infty)$에 단 하나 존재한다. 즉, $M>3$이다.

$b=M$일 때의 함수 $g(x)$에 대하여 $g(3)=18$이므로

$g(3)=|3|\int_M^3 f(t)dt=18$에서

$\int_M^3 f(t)dt=6$

이때 $h(M)=0$, 즉 $\int_0^M f(t)dt=0$이므로

$$\int_0^3 f(t)dt=\int_0^M f(t)dt+\int_M^3 f(t)dt$$
$$=0+6=6 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

한편,

$$\int_0^3 f(t)dt=\int_0^1 f(t)dt+\int_1^2 f(t)dt+\int_2^3 f(t)dt$$
$$=\int_0^1(-t^2+1)dt+\int_1^2(-at+a)dt+\int_2^3(at-3a)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^1+\left[-\frac{a}{2}t^2+at\right]_1^2+\left[\frac{a}{2}t^2-3at\right]_2^3$$
$$=\frac{2}{3}+\left(-\frac{a}{2}\right)+\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{2}{3}-a \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$\frac{2}{3}-a=6$, 즉 $a=-\frac{16}{3}$

$x\geq 3$에서 $f(x)=ax-3a$, 즉 $f(x)=-\frac{16}{3}x+16$이고

$\int_M^3 f(t)dt=6$이므로

$$\int_M^3 f(t)dt=\int_M^3\left(-\frac{16}{3}t+16\right)dt$$
$$=\left[-\frac{8}{3}t^2+16t\right]_M^3$$
$$=-24+48+\frac{8}{3}M^2-16M=6$$

에서 $4M^2-24M+27=0$

$(2M-3)(2M-9)=0$

$M>3$이므로 $M=\dfrac{9}{2}$

따라서 $12M=12\times\dfrac{9}{2}=54$

30. **정답** 3

$f(x)=\displaystyle\int_0^x(2x-t)(3t^2+at+b)dt$

$\quad =2x\displaystyle\int_0^x(3t^2+at+b)dt-\int_0^x t(3t^2+at+b)dt$

이므로

$f'(x)$

$=\left\{2\displaystyle\int_0^x(3t^2+at+b)dt+2x(3x^2+ax+b)\right\}-x(3x^2+ax+b)$

$=2\displaystyle\int_0^x(3t^2+at+b)dt+x(3x^2+ax+b)$

$=2\left[t^3+\dfrac{a}{2}t^2+bt\right]_0^x+3x^3+ax^2+bx$

$=(2x^3+ax^2+2bx)+3x^3+ax^2+bx$

$=x(5x^2+2ax+3b)$ …… ㉠

이때 조건 (가)에서 $f'(1)=0$이므로 ㉠에서

$f'(1)=5+2a+3b=0$

$b=-\dfrac{2a+5}{3}$ …… ㉡

따라서 $f'(x)=x(5x^2+2ax-2a-5)=x(x-1)(5x+2a+5)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-\dfrac{2a+5}{5}$

조건 (나)에서 열린구간 $(0,\ 1)$에 속하는 모든 실수 k에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(k)$의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 함수 $f=(x)$의 그래프와 $y=f(k)(0<k<1)$이 만나는 서로 다른 점의 개수가 2이어야 한다.

즉, 함수 $f(x)$의 극댓값이 존재하지 않아야 하므로

$-\dfrac{2a+5}{5}=0$ 또는 $-\dfrac{2a+5}{5}=1$

이어야 한다.

즉, $a=-\dfrac{5}{2}$ 또는 $a=-5$

이때 a는 정수이므로 $a=-5$이고, ㉡에서

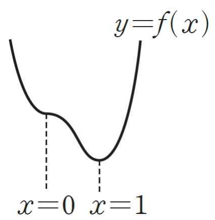
$b=-\dfrac{2a+5}{3}=-\dfrac{2\times(-5)+5}{3}=\dfrac{5}{3}$

따라서 $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\left|\dfrac{-5}{\frac{5}{3}}\right|=3$

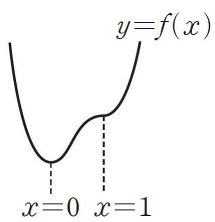
[참고]

a의 값에 따라 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

(ⅰ) $a=-\dfrac{5}{2}$일 때



(ⅱ) $a=-5$일 때



31. **정답** ⑤

$h(t)=f(|t|)$라 하면 모든 실수 t에 대하여 $h(-t)=h(t)$이므로

$g(x)=\displaystyle\int_{-x}^x f(|t|)dt=\int_{-x}^x h(t)dt=2\int_0^x h(t)dt=2\int_0^x f(|t|)dt$

이고, $x>0$일 때

$g(x)=2\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ …… ㉠

또 모든 실수 x에 대하여

$g(-x)=\displaystyle\int_x^{-x} f(|t|)dt=-\int_{-x}^x f(|t|)dt=-g(x)$ …… ㉡

한편, 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수이고 $f(0)=f(1)=0$인 삼차함수이므로

$f(x)=ax(x-1)(x-k)$ ($a>0$, k는 상수)

로 놓을 수 있다.

$g(2)=2\displaystyle\int_0^2 f(t)dt=2\int_0^2 at(t-1)(t-k)dt$

$\quad =2a\displaystyle\int_0^2\{t^3-(k+1)t^2+kt\}dt=2a\left[\dfrac{1}{4}t^4-\dfrac{k+1}{3}t^3+\dfrac{k}{2}t^2\right]_0^2$

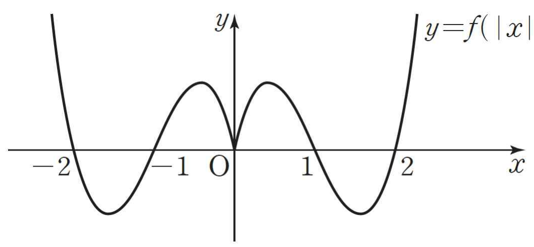
$\quad =2a\left\{4-\dfrac{8}{3}(k+1)+2k\right\}=\dfrac{4}{3}a(2-k)$

이고 조건 (가)에서 $g(2)=0$이므로

$\dfrac{4}{3}a(2-k)=0$에서 $k=2$

그러므로 $f(x)=ax(x-1)(x-2)$

이때 $f(|x|)=\begin{cases}f(x) & (x\geq 0)\\ f(-x) & (x<0)\end{cases}$이므로 $x\geq 0$에서 함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 같고, $x<0$에서 함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 $x\geq 0$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(|x|)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

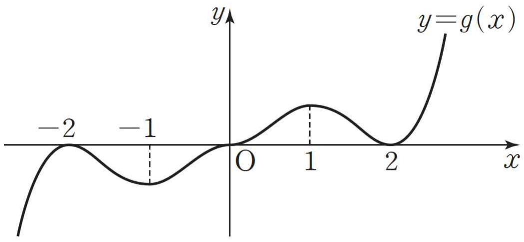
그러므로 $x>0$일 때 ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(x)=2f(x)$이고, $x>0$일 때 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	(0)	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하고

$\displaystyle\lim_{x\to0+}g'(x)=\lim_{x\to0+}2f(x)=0$이므로 $g'(0)=0$이다.

또 $g(0)=0$이고, ㉡에 의하여 함수 $y=g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



함수 $g(x)$는 $x=-1$, $x=2$에서 극소이고, 조건 (가)에 의하여 $g(2)=0$이므로 조건 (나)에 의하여 함수 $g(x)$의 모든 극솟값의 합이 -1이려면 $g(-1)=-1$이어야 한다.

ⓛ에 의하여 $g(-1)=-g(1)=-1$에서 $g(1)=1$

$$g(1)=\int_{-1}^{1} f(|t|)dt=2\int_{0}^{1} f(t)dt$$

$$=2a\int_{0}^{1}(t^3-3t^2+2t)dt=2a\left[\frac{1}{4}t^4-t^3+t^2\right]_0^1$$

$$=2a\left(\frac{1}{4}-1+1\right)=\frac{a}{2}$$

즉, $\frac{a}{2}=1$에서 $a=2$

따라서 $f(x)=2x(x-1)(x-2)$이므로

$f(3)=2\times3\times2\times1=12$

32. **정답** 10

$\int_{-1}^{1} f(t)dt=0$이면 $g(x)=0$이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않으므로

$\int_{-1}^{1} f(t)dt>0$ 또는 $\int_{-1}^{1} f(t)dt<0$이다.

(i) $\int_{-1}^{1} f(t)dt>0$일 때

$g'(x)=\int_{-1}^{1} f(t)dt\times f(x)$이고, 함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로

$\lim_{x\to\infty} g'(x)=\infty$

즉, 함수 $g(x)$의 최댓값이 존재하지 않으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $\int_{-1}^{1} f(t)dt<0$일 때

$g'(x)=\int_{-1}^{1} f(t)dt\times f(x)$이고, 조건 (가)에 의하여 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 극대인 동시에 최대이므로

$g'(2)=0$에서 $f(2)=0$

그러므로 함수 $f(x)$를

$f(x)=\alpha(x+1)(x-2)(x-\beta)$ ($\alpha>0$, β는 상수)

로 놓을 수 있다.

이때

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt=\int_{-1}^{1}\alpha(x+1)(x-2)(x-\beta)dt$$

$$=\alpha\int_{-1}^{1}\{t^3-(\beta+1)t^2-(2-\beta)t+2\beta\}dt$$

$$=2\alpha\int_{-1}^{1}\{-(\beta+1)t^2+2\beta\}dt$$

$$=2\alpha\left[-\frac{\beta+1}{3}t^3+2\beta t\right]_0^1$$

$$=\frac{2\alpha(5\beta-1)}{3}$$

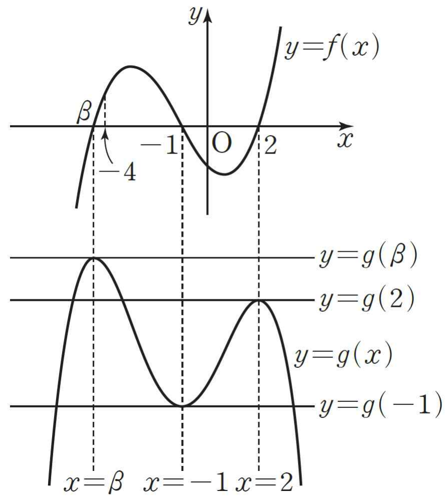
$\int_{-1}^{1} f(t)dt<0$이므로

$\frac{2\alpha(5\beta-1)}{3}<0$에서 $\beta<\frac{1}{5}$

한편, $\beta=-4$일 때, $\int_{-4}^{2} f(t)dt=0$이므로 β의 값의 범위를 나누어 $\int_{-1}^{1} f(t)dt<0$과 주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하면 다음과 같다.

① $\beta<-4$일 때

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 [그림 1]과 같다.

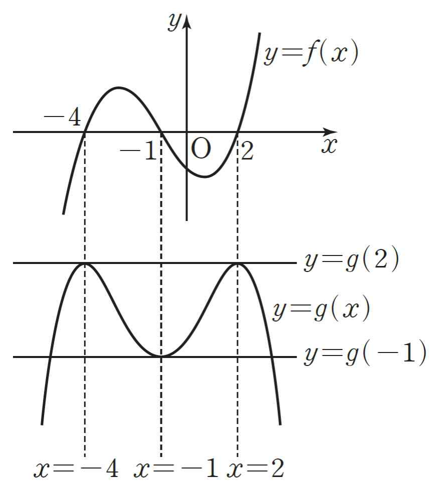


[그림 1]

이때 $g(\beta)>g(2)$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

② $\beta=-4$일 때

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 [그림 2]과 같다.



[그림 2]

함수 $h(k)$는 다음과 같다.

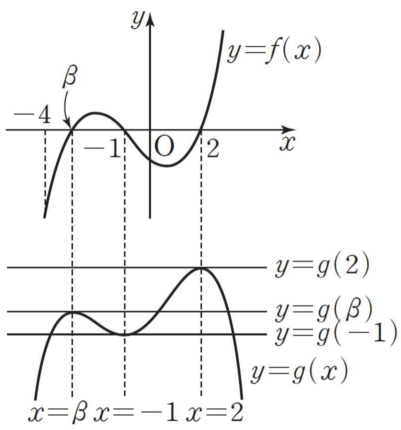
$$h(k)=\begin{cases}2 & (k<g(-1))\\3 & (k=g(-1))\\4 & (g(-1)<k<g(2))\\2 & (k=g(2))\\0 & (k>g(2))\end{cases}$$

이때 $\left|\lim_{k\to a+}h(k)-\lim_{k\to a-}h(k)\right|=2$를 만족시키는 a의 값은 $g(-1)$뿐이다.

그런데 $g(-1)=0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

③ $-4<\beta<-1$일 때

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 [그림 3]과 같다.



[그림 3]

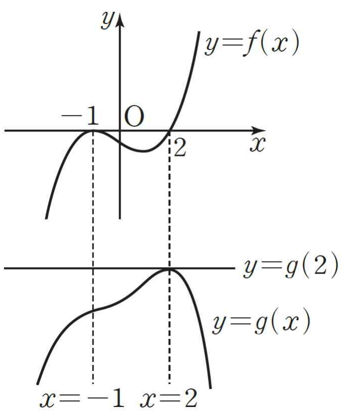
함수 $h(k)$는 다음과 같다.

$$h(k)=\begin{cases}2 & (k<g(-1))\\3 & (k=g(-1))\\4 & (g(-1)<k<g(\beta))\\3 & (k=g(\beta))\\2 & (g(\beta)<k<g(2))\\1 & (k=g(2)\\0 & (k>g(2))\end{cases}$$

이때 $\left|\lim_{k\to a+}h(k)-\lim_{k\to a-}h(k)\right|=2$를 만족시키는 a의 값은 $g(2)$, $g(\beta)$, $g(-1)$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

④ $\beta=-1$일 때

$f(x)=\alpha(x+1)^2(x-2)=\alpha(x^3-3x-2)$이고, 함수 $y=f(x)$와 그에 따른 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 [그림 4]와 같다.



[그림 4]

함수 $h(k)$는 다음과 같다.

$$h(k)=\begin{cases}2 & (k<g(2))\\1 & (k=g(2))\\0 & (k>g(2))\end{cases}$$

이때 $\left|\lim_{k\to a+}h(k)-\lim_{k\to a-}h(k)\right|=2$를 만족시키는 a의 값은 $g(2)$뿐이므로 조건 (나)에 의하여 $g(2)=3$이어야 한다.

$$\int_{-1}^{1}f(t)dt=\int_{-1}^{1}\alpha(t^3-3t-2)dt=2\alpha\int_{0}^{1}(-2)dt$$

$$=2\alpha\Big[-2t\Big]_0^1=-4\alpha$$

$$\int_{-1}^{2}f(t)dt=\int_{-1}^{2}\alpha(t^3-3t-2)dt=\alpha\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2-2t\right]_{-1}^{2}$$

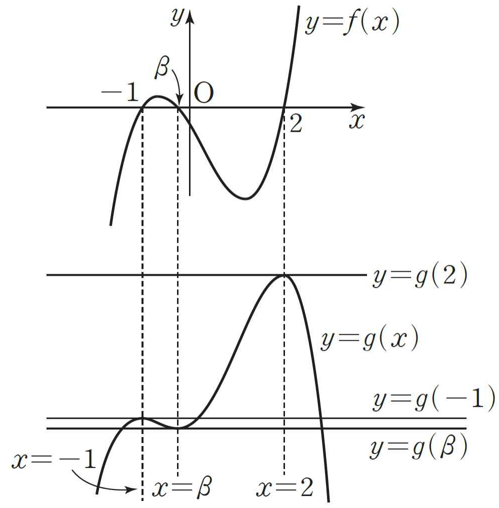
$$=\alpha\left(-6-\frac{3}{4}\right)=-\frac{27}{4}\alpha$$

즉, $27\alpha^2=3$에서 $\alpha>0$이므로 $\alpha=\frac{1}{3}$

그러므로 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x-\frac{2}{3}$

⑤ $-1<\beta<\frac{1}{5}$일 때

$y=f(x)$와 그에 따른 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 [그림 5]와 같다.



[그림 5]

함수 $h(k)$는 다음과 같다.

$$h(k)=\begin{cases}2 & (k<g(\beta))\\3 & (k=g(\beta))\\4 & (g(\beta)<k<g(-1))\\3 & (k=g(-1)))\\2 & (g(-1)<k<g(2))\\1 & (k=g(2)\\0 & (k>g(2))\end{cases}$$

이때 $\left|\lim_{k\to a+}h(k)-\lim_{k\to a-}h(k)\right|=2$를 만족시키는 a의 값은 $g(2)$, $g(-1)$, $g(\beta)$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x-\frac{2}{3}$

따라서

$$g(0)=\int_{-1}^{1}f(t)dt\times\int_{-1}^{0}f(t)dt$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3}t^3-t-\frac{2}{3}\right)dt\times\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{3}t^3-t-\frac{2}{3}\right)dt$$

$$=2\left[-\frac{2}{3}t\right]_0^1\times\left[\frac{1}{12}t^4-\frac{1}{2}t^2-\frac{2}{3}t\right]_{-1}^{0}$$

$$-\frac{4}{3}\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{3}$$

이므로 $30\times g(0)=30\times\frac{1}{3}=10$

[참고]

$g(\beta)=g(2)$인 β의 값은 다음과 같이 구할 수 있다.

$\int_{-1}^{\beta}f(t)dt=\int_{-1}^{2}f(t)dt$에서 $\int_{-1}^{2}f(t)dt-\int_{-1}^{\beta}f(t)dt=0$

즉, $\int_{-1}^{2}f(t)dt+\int_{\beta}^{-1}f(t)dt=0$에서 $\int_{\beta}^{2}f(t)dt=0$

$\int_{\beta}^{2}f(t)dt=\alpha\int_{\beta}^{2}(t+1)(t-2)(t-\beta)dt$

$$=\alpha\int_{\beta}^{2}\{t^3-(\beta+1)t^2-(2-\beta)t+2\beta\}dt$$

$$=\alpha\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{\beta+1}{3}t^3-\frac{2-\beta}{2}t^2+2\beta t\right]_{\beta}^{2}$$

$$=\frac{\alpha}{12}(\beta^4-2\beta^3-12\beta^2+40\beta-32)=\frac{\alpha}{12}(\beta-2)^3(\beta+4)$$

$\beta<\frac{1}{5}$ 이므로 $\frac{\alpha}{12}(\beta-2)^3(\beta+4)=0$에서 $\beta=-4$

그러므로 $\int_{-4}^{2}f(t)dt=0$

김지형
대치예섬