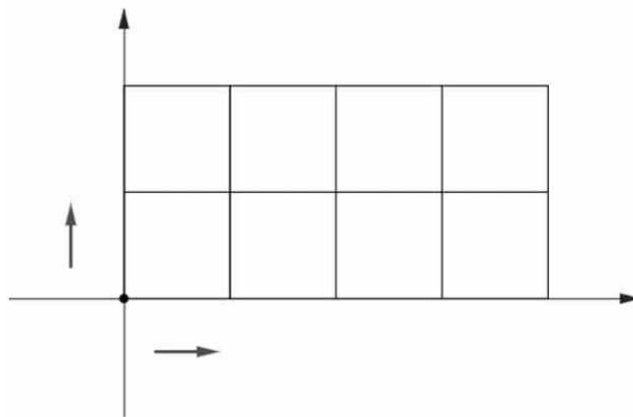


2025학년도 연세대학교 수시모집 논술시험 문제 자연계열(수학)

모집단위		수험번호		성명	
------	--	------	--	----	--

[문제 1, 단답형] 주머니에 숫자 1, 3, 5가 적힌 공이 각각 1개, 2, 4, 6이 적힌 공이 각각 2개씩 있다. 주머니의 공을 뽑고, 다시 주머니에 넣는 시행을 다음과 같이 진행한다.

- (I) 주머니에서 뽑은 공의 눈에 따라 A점에 위치한 점 P에 있는 자동차를 북쪽 또는 동쪽으로 이동시킨다.
 (II) 공 중에서 각각 1, 3, 5가 적힌 공을 뽑으면 북쪽으로 나온 수만큼, 공 중에서 각각 2, 4, 6이 적힌 공을 뽑으면 동쪽으로 나온 수만큼 이동한다.
 (III) 북쪽 혹은 동쪽 경계에 도달하면 게임이 끝난다.



자동차가 북쪽 경계에 도달하여 시행을 종료하였을 때, 두 번째 시행에서 게임이 종료했을 확률을 구하시오. **[10점]**

[문제 2, 단답형] $x \geq 1$ 인 실수 x 에 대하여 $f(x) = \int_1^x \frac{t^{2025} + t^{2024} + 1}{t^{2025} + t^{1885} + 1} dt$ 일 때, 다음 극한값을 구하시오. **[10점]**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^{10} \frac{f(n+2k) - f(n)}{(k-1)k(k+1)}$$

[문제 3, 단답형] 자연수 n 에 대하여 nk 가 2025의 배수가 되게 하는 자연수 k 의 최솟값을 $f(n)$ 이라 하자.

[문제 3-1] $f(n) = f(n^2)$ 을 만족시키는 2025 이하의 자연수 n 의 개수를 구하시오. **[8점]**

[문제 3-2] $f(f(n)) < n$ 을 만족시키는 2025 이하의 자연수 n 의 개수를 구하시오. **[7점]**

[문제 4, 단답형] 자연수 n 과 실수 $\alpha > 1$ 에 대하여, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$$a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}, \quad b_n = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$

이라 하자.

[문제 4-1] 다음 극한값을 구하시오. **[5점]**

$$\{n(3n+1)^3 (a_n)^2\}$$

[문제 4-2] $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p b_n = L$ ($L \neq 0$)일 때, $p+L$ 의 값을 α 에 대한 식으로 나타내시오. **[10점]**

[문제 5, 서술형] 수열 $\{x_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (I) $x_1 = k$ 이고, x_{n+1} 은 $y = x^2$ 위의 점 (x_n, x_n^2) 에서 그은 접선 l 의 x 절편이다.
 (II) 직선 l 에 수직이고 점 (a_n, a_n^2) 에서 그은 직선의 x 절편을 b_k 라 하자.

[문제 5-1] $a_k = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 이라 할 때, a_{2025} 의 값을 구하시오. [5점]

[문제 5-2] 다음 극한값을 구하시오. [15점]

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{a_1^3}{b_m - a_m} + 1 \right)^{\frac{a_1^2}{m^3}} \times \left(\frac{a_2^3}{b_m - a_m} + 1 \right)^{\frac{a_2^2}{m^3}} \times \cdots \times \left(\frac{a_k^3}{b_m - a_m} + 1 \right)^{\frac{a_k^2}{m^3}} \right\}$$

[문제 6, 서술형] 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $A(-2, 0)$ 과 두 원 $C_1: x^2 + y^2 = 1$, $C_2: (x+1)^2 + y^2 = 1$ 이 있다. 원 C_1 의 중심을 O_1 , 원 C_2 의 중심을 O_2 라 하자. 두 원의 교점을 R, R' 이라고 하자. 점 Q 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (I) \overrightarrow{AP} 와 \overrightarrow{AQ} 는 서로 평행하다.
 (II) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = 9$

[문제 6-1] 점 P 가 원 C_1 위를 움직일 때, 점 Q 가 그리는 도형의 방정식을 구하시오. [15점]

[문제 6-2] 점 P 가 두 원 C_1, C_2 로 둘러싸인 영역의 경계 위를 움직일 때, 점 Q 가 그리는 곡선의 길이를 구하시오. [15점]

