2025학년도 이페이지 모의고사 정답과 해설

수학 영역

1.

$$\frac{(2^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}})^{-\frac{3}{11}(\sqrt{3}+6)}}{(2^{\frac{2\sqrt{15}}{1-\sqrt{5}}} \times 2^{\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}+1}})^{\frac{1}{3}}} = \frac{(2^{\frac{2\sqrt{3}-1}{3}})^{-\frac{3}{11}(\sqrt{3}+6)}}{(2^{\frac{2\sqrt{15}}{1-\sqrt{5}}+\frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{5}}})^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{2^{-\sqrt{3}}}{(2^{-3\sqrt{3}})^{\frac{1}{3}}} = 1$$

답: ②

2.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(11+h)-3f(2-2h)}{17h} = \frac{1}{17}\lim_{h\to 0}\frac{f(11+h)-3f(2-2h)}{h}$$

$$= \frac{1}{17}\lim_{h\to 0}\frac{f(11+h)-f(11)-3f(2-2h)+3f(2)}{h}$$

$\because f(11) = 3f(2)$

$$= \frac{1}{17}(\lim_{h\to 0}\frac{f(11+h)-f(11)}{h} - 3\lim_{h\to 0}\frac{f(2-2h)-f(2)}{h})$$

$$= \frac{1}{17}(\lim_{h\to 0}\frac{f(11+h)-f(11)}{h} + 6\lim_{h\to 0}\frac{f(2-2h)-f(2)}{-2h})$$

$$= \frac{1}{17}f'(11)+6f'(2)$$

$\therefore f'(x) = -2x+9$

$\rightarrow f'(11) = -13,\ f'(2) = 5$

$\rightarrow \frac{17}{17} = 1$

답: ③

3. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면,

$$a_2 \times a_4 = a^2r^4 = 9,\quad a_1 + \frac{1}{a_3} = a + \frac{1}{ar^2} = ar$$

$\rightarrow a + \frac{1}{ar^2} = ar$ 양변에 ar^4를 곱하면

$\rightarrow a^2r^4 + r^2 = a^2r^5$

$\rightarrow 9 + r^2 = 9r$ ($\because a^2r^4 = 9$)

근의 공식을 사용하면 $r = \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2} \rightarrow r^2 = \frac{63 \pm 27\sqrt{5}}{2}$

$a^2 = \frac{9}{r^4} \rightarrow a = \frac{3}{r^2}$ ($\because a$가 양수)

$\rightarrow a = \frac{6}{63 \pm 27\sqrt{5}} = \frac{2}{21 \pm 9\sqrt{5}} = \frac{7 \mp 3\sqrt{5}}{6}$

$= \frac{7+3\sqrt{5}}{6}$ ($\because a > 1$)

$\therefore p = \frac{7}{6},\ q = \frac{1}{2} \rightarrow 12pq = 7$

답: ③

4.

$\lim_{x\to 2} f(-x) = (2-)$

$\lim_{x\to 2-} f(\frac{4}{x}) = \lim_{x\to 2+} f(x) = (1+)$

$\lim_{x\to 1+} f(-x) = (-2+)$

$f(2) = -2$

$$\therefore \frac{\lim_{x\to 2} f(-f(\frac{4}{f(-x)}))}{f(2)} = \frac{\lim_{x\to 2-} f(-f(\frac{4}{x}))}{f(2)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 2+} f(-f(x))}{f(2)} = \frac{\lim_{x\to 1+} f(-x)}{f(2)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

답: ⑤

5.

$\sin^2(6\theta^2+\frac{7\pi^3}{\theta})+\cos^2(\theta^2)=1$

$\rightarrow$ $\sin^2(6\theta^2+\frac{7\pi^3}{\theta})=1-\cos^2(\theta^2)$

$\rightarrow$ $\sin^2(6\theta^2+\frac{7\pi^3}{\theta})=\sin^2(\theta^2)$

$\rightarrow$ $\sin(6\theta^2+\frac{7\pi^3}{\theta})=\pm sin(\theta^2)$

☞ 이때, $\sin(6\theta^2+\frac{7\pi^3}{\theta})=\pm sin(\theta^2+2n\pi)$ (단, n은 정수)라고 적었어야 한다. (정석대로라면) 그러나, $2n\pi$를 쓰면 안되게 문제에 복잡한 조건을 추가하였으니, 그냥 넘어가도록 하자.

만약 '단,'으로 시작하는 복잡한 조건이 없었다면, 두 함수 $y=6x^3\pm x^3+7\pi^3$과 $y=2n\pi x$의 그래프를 그려서 비교해보아야 하며, n이 $n\le-1$인 정수일 때, θ 조건에 만족하는 무수히 많은 교점이 존재한다.

알아만 두도록 하자.

$\rightarrow$ $\sin(6\theta^2+\frac{7\pi^3}{\theta})=\sin(\pm\theta^2)$

$\rightarrow$ $6\theta^2+\frac{7\pi^3}{\theta}=\pm\theta^2$

$\rightarrow$ $6\theta^3\pm\theta^3+7\pi^3=0$

만약 $5\theta^3+7\pi^3=0$ 라면, $\theta=-\pi\sqrt[3]{\frac{7}{5}}$ 라서 조건에 맞지 않는다.

$\rightarrow$ $7\theta^3+7\pi^3=0$

$\rightarrow$ $\theta=-\pi$

$\rightarrow$ $\tan(-\frac{4}{3}\pi)=-\tan\frac{1}{3}\pi=-\sqrt{3}$

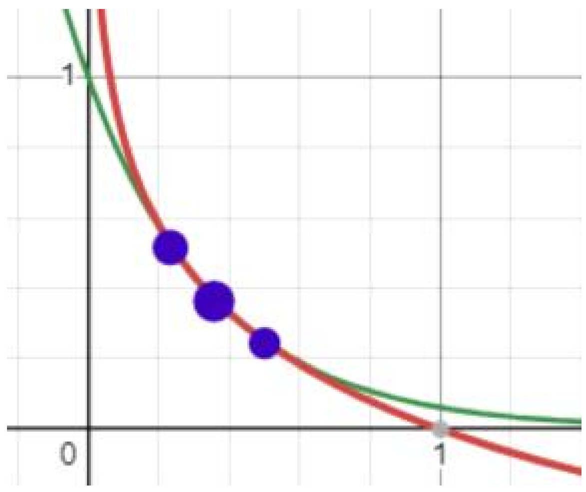
답: ①

6.

$\log_a\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\rightarrow$ $a=\frac{1}{16}$

감소 로그함수와 그 역함수의 교점이 $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ 에 존재한다는 것은 곧 $(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$도 교점이며, 직선 $y=x$ 위에도 교점이 하나 존재한다는 것이다. 그래프를 그릴 필요는 딱히 없지만 그래도 함수와 그 역함수의 그래프를 그려본다면



파란 점과 같은 위치에 교점이 3개 생길 것이다.

직선 $y=x$위에 있는 교점의 y좌표를 t라고 하자.

t는 다른 교점들 사이에 있으므로,

$\frac{1}{4}<t<\frac{1}{2}$이다.

따라서 모든 교점의 y좌표의 합 $t+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=t+\frac{3}{4}$

$\rightarrow$ $1<t+\frac{3}{4}<\frac{5}{4}$

답: ④

7.

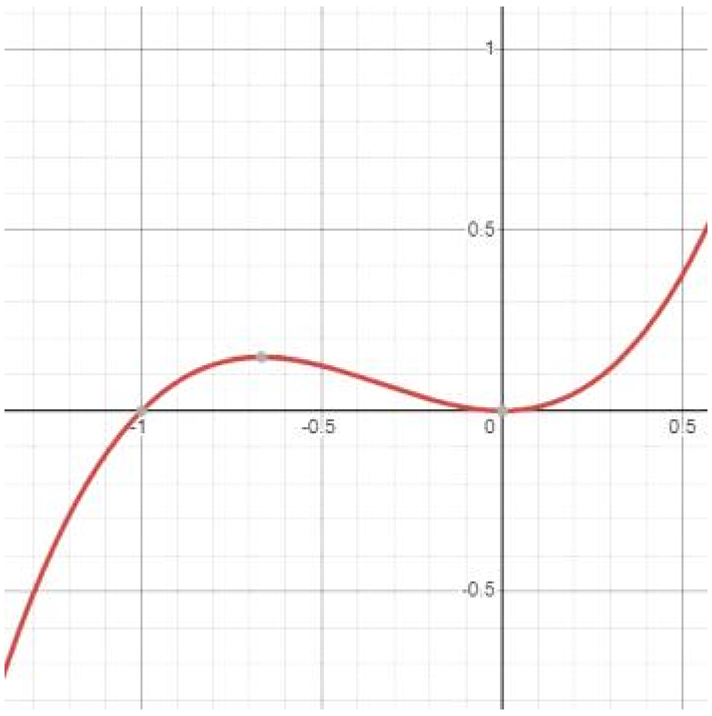
$f(x)=x^2+ax+b$ 라고 하자.

$\{f'(f'(x)\}^2-f(f'(x))$를 먼저 미분해도 되고, 대입한 후 미분해도 된다. 차수도 높지 않으니 대입을 먼저 해보자.

대입하면 $12x^2+18ax+7a^2-b$ 이고 이를 미분하면

$24x+18a=6(4x+3a)$가 $x=-\frac{3}{4}$에서 0이 되어야한다.

따라서 $a=1$이고 $xf(x)-xf(0)$는 x^3+x^2 이다.



삼차함수 비율관계에 의해 극댓값을 가지는 x를 구할 수 있다.

x^3+x^2 에 $x=-\frac{2}{3}$을 넣으면 $-\frac{8}{27}+\frac{4}{9}=\frac{4}{27}$

답: ②