

20. 3 이상의 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = x^n e^{-x}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

$$\neg. f\left(\frac{n}{2}\right) = f'\left(\frac{n}{2}\right)$$

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $x=n$ 에서 극댓값을 갖는다.

ㄷ. 점 $(0, 0)$ 은 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이다.

① ㄴ

② ㄷ

③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 양수 t 에 대하여 $\log t$ 의 지표와 가수를 각각 $f(t)$, $g(t)$ 라 하자. 자연수 n 에 대하여

$$f(t) = 9n \left\{ g(t) - \frac{1}{3} \right\}^2 - n$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 $f(t)$ 의 합을 a_n 이라 할 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$ 의 값은? [4점]

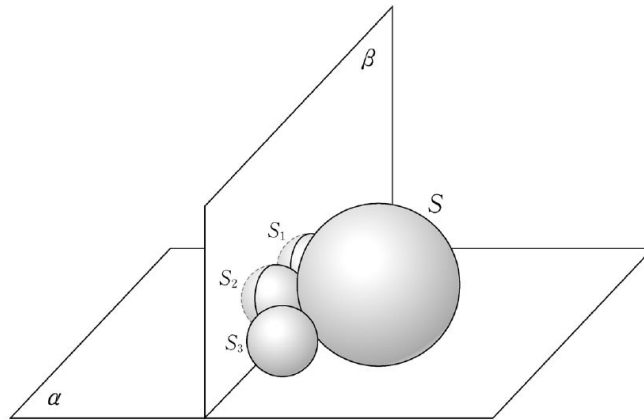
- ① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

29. 그림과 같이 평면 α 위에 놓여 있는 서로 다른 네 구 S, S_1, S_2, S_3 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) S 의 반지름의 길이는 3이고, S_1, S_2, S_3 의 반지름의 길이는 1이다.
 (나) S_1, S_2, S_3 은 모두 S 에 접한다.
 (다) S_1 은 S_2 와 접하고, S_2 는 S_3 과 접한다.

S_1, S_2, S_3 의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3 이라 하자. 두 점 O_1, O_2 를 지나고 평면 α 에 수직인 평면을 β , 두 점 O_2, O_3 을 지나고 평면 α 에 수직인 평면이 S_3 과 만나서 생기는 단면을 D 라 하자. 단면 D 의 평면 β 위로의 정사영의 넓이를 $\frac{q}{p}\pi$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점]



30. 양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이다.

(나) 임의의 양의 실수 t 에 대하여 세 점

$(0, 0)$, $(t, f(t))$, $(t+1, f(t+1))$

을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\frac{t+1}{t}$ 이다.

(다) $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = 2$

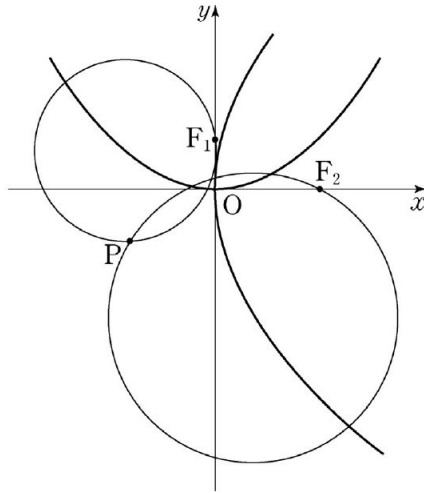
$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x} dx = \frac{q}{p}$ 라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는

서로소인 자연수이다.) [4점]

28. 좌표평면에서 포물선 $C_1: x^2 = 4y$ 의 초점을 F_1 , 포물선 $C_2: y^2 = 8x$ 의 초점을 F_2 라 하자. 점 P는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 중심이 C_1 위에 있고 점 F_1 을 지나는 원과
 중심이 C_2 위에 있고 점 F_2 를 지나는 원의 교점이다.
 (나) 제3사분면에 있는 점이다.

원점 O에 대하여 \overline{OP}^2 의 최댓값을 구하시오. [4점]



30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $1 \leq f'(x) \leq 3$ 이다.

(나) 모든 정수 n 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(4n, 8n)$, 점 $(4n+1, 8n+2)$, 점 $(4n+2, 8n+5)$, 점 $(4n+3, 8n+7)$ 을 모두 지난다.

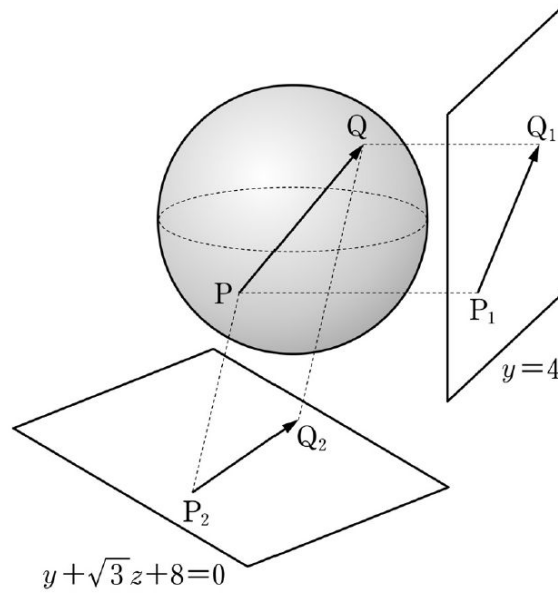
(다) 모든 정수 k 에 대하여 닫힌 구간 $[2k, 2k+1]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 각각 이차함수의 그래프의 일부이다.

$\int_3^6 f(x)dx = a$ 라 할 때, $6a$ 의 값을 구하시오. [4점]

20. 1보다 큰 실수 x 에 대하여 $\log x$ 의 지표와 가수를 각각 $f(x)$, $g(x)$ 라 하자. $3f(x)+5g(x)$ 의 값이 10의 배수가 되도록 하는 x 의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열할 때 2번째 수를 a , 6번째 수를 b 라 하자. $\log ab$ 의 값은? [4점]

- ① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

29. 좌표공간에서 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 두 점 P, Q에서 평면 $y=4$ 에 내린 수선의 발을 각각 P_1, Q_1 이라 하고, 평면 $y + \sqrt{3}z + 8 = 0$ 에 내린 수선의 발을 각각 P_2, Q_2 라 하자. $2|\overrightarrow{PQ}|^2 - |\overrightarrow{P_1Q_1}|^2 - |\overrightarrow{P_2Q_2}|^2$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]



30. 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x) = f(x)e^{-x}$ 이
다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(1, g(1))$ 과 점 $(4, g(4))$ 는 곡선 $y = g(x)$ 의 변곡점
이다.

(나) 점 $(0, k)$ 에서 곡선 $y = g(x)$ 에 그은 접선의 개수가
3인 k 의 값의 범위는 $-1 < k < 0$ 이다.

$g(-2) \times g(4)$ 의 값을 구하시오. [4점]

21. 자연수 n 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 를 매개변수 t 로 나타내면

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = (2t^2 + nt + n)e^t \end{cases}$$

이고, $x \geq e^{\frac{n}{2}}$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 는 $x=a_n$ 에서 최솟값 b_n 을 갖는다. $\frac{b_3}{a_3} + \frac{b_4}{a_4} + \frac{b_5}{a_5} + \frac{b_6}{a_6}$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{23}{2}$ ② 12 ③ $\frac{25}{2}$ ④ 13 ⑤ $\frac{27}{2}$

30. 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$ 가

$$g(e^x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leq x < 1) \\ g(e^{x-1}) + 5 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

를 만족시키고, $\int_1^{e^2} g(x) dx = 6e^2 + 4$ 이다.

$\int_1^e f(\ln x) dx = ae + b$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

(단, a , b 는 정수이다.) [4점]

14. 이차정사각행렬 A 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \ A^3 = E$$

(나) $A - E$ 의 역행렬이 존재한다.

행렬 $(A - E)^{60}$ 의 모든 성분의 합은? (단, E 는 단위행렬이다.)

[4점]

① 3^{30}

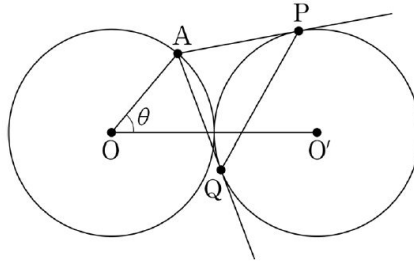
② $2 \cdot 3^{30}$

③ 3^{31}

④ $4 \cdot 3^{30}$

⑤ $5 \cdot 3^{30}$

21. 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 1인 두 원 O, O' 이 외접하고 있다. 원 O 위의 점 A 에서 원 O' 에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q 라 하자. $\angle AOO' = \theta$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\overline{PQ}}{\theta}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



- ① 2 ② $\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

27. 함수 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 에 대하여

$$F(x) = \int_0^x t f(x-t) dt \quad (x \geq 0)$$

일 때, $F'(a) = \ln 10$ 을 만족시키는 상수 a 의 값을 구하시오.

[4점]

29. 좌표평면에서 포물선 $y^2 = 16x$ 위의 점 A에 대하여 점 B는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 점 A가 원점이면 점 B도 원점이다.
(나) 점 A가 원점이 아니면 점 B는 점 A, 원점 그리고 점 A에서의 접선이 y 축과 만나는 점을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심이다.

점 A가 포물선 $y^2 = 16x$ 위를 움직일 때 점 B가 나타내는 곡선을 C 라 하자. 점 $(3, 0)$ 을 지나는 직선이 곡선 C 와 두 점 P, Q 에서 만나고 $\overline{PQ} = 20$ 일 때, 두 점 P, Q 의 x 좌표의 값의 합을 구하시오. [4점]

30. 좌표평면에서 곡선 $y = x^2 + x$ 위의 두 점 A, B의 x 좌표를 각각 s, t ($0 < s < t$)라 하자. 양수 k 에 대하여 두 직선 OA, OB와 곡선 $y = x^2 + x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 k 가 되도록 하는 점 (s, t) 가 나타내는 곡선을 C 라 하자. 곡선 C 위의 점 중에서 점 $(1, 0)$ 과의 거리가 최소인 점의 x 좌표가 $\frac{2}{3}$ 일 때, $k = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 0는 원점이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2014 학년도 예비시험

21. 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad -1 \leq x < 1 \text{ 일 때 } f(x) = \frac{(x^2-1)^2}{x^4+1} \text{ 이다.}$$

$$(나) \quad \text{모든 실수 } x \text{ 에 대하여 } f(x+2) = f(x) \text{ 이다.}$$

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

$$\neg. \int_{-2}^2 f(x) dx = 4 \int_0^1 f(x) dx$$

$$\neg. 1 < x < 2 \text{ 일 때 } f'(x) > 0 \text{ 이다.}$$

$$\square. \int_1^3 x |f'(x)| dx = 4$$

① \neg

② \square

③ \neg, \neg

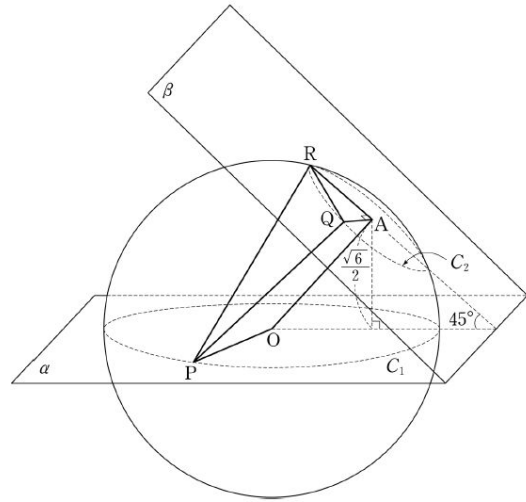
④ \neg, \square

⑤ \neg, \neg, \square

30. 반지름의 길이가 2인 구의 중심 O 를 지나는 평면을 α 라 하고, 평면 α 와 이루는 각이 45° 인 평면을 β 라 하자. 평면 α 와 구가 만나서 생기는 원을 C_1 , 평면 β 와 구가 만나서 생기는 원을 C_2 라 하자. 원 C_2 의 중심 A 와 평면 α 사이의 거리가 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 일 때, 그림과 같이 다음 조건을 만족하도록 원 C_1 위에 점 P , 원 C_2 위에 두 점 Q, R 를 잡는다.

- | |
|---|
| <p>(가) $\angle QAR = 90^\circ$
 (나) 직선 OP와 직선 AQ는 서로 평행하다.</p> |
|---|

평면 PQR 와 평면 $AQPO$ 가 이루는 각을 θ 라 할 때, $\cos^2 \theta = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



12. 연속함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = e^{x^2} + \int_0^1 t f(t) dt$$

를 만족시킬 때, $\int_0^1 x f(x) dx$ 의 값은? [3점]

① $e - 2$

② $\frac{e-1}{2}$

③ $\frac{e}{2}$

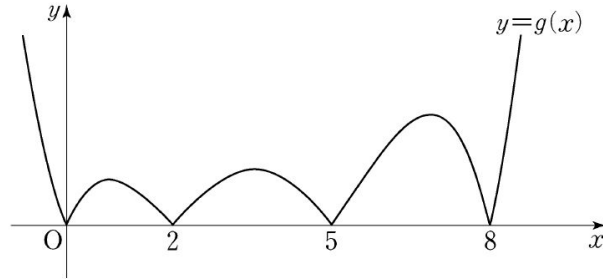
④ $e - 1$

⑤ $\frac{e+1}{2}$

19. 삼차함수 $f(x)$ 는 $f(0) > 0$ 을 만족시킨다. 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \left| \int_0^x f(t) dt \right|$$

라 할 때, 함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. 방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f'(0) < 0$

ㄷ. $\int_m^{m+2} f(x) dx > 0$ 을 만족시키는 자연수 m 의 개수는 3이다.

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

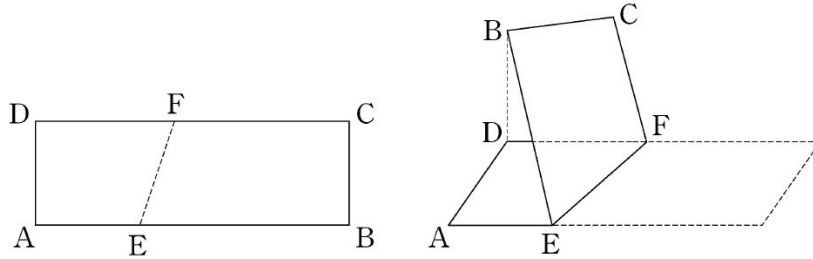
20. 좌표공간에서 정사면체 ABCD의 한 면 ABC는 평면 $2x - y + z = 4$ 위에 있고, 꼭짓점 D는 평면 $x + y + z = 3$ 위에 있다. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(1, 1, 3)$ 일 때, 정사면체 ABCD의 한 모서리의 길이는? [4점]

- ① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $3\sqrt{2}$

21. 함수 $f(x) = kx^2e^{-x}$ ($k > 0$) 과 실수 t 에 대하여
곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서 x 축까지의 거리와
 y 축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$ 라 하자.
함수 $g(t)$ 가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는
 k 의 최댓값은? [4점]

- ① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ \sqrt{e} ⑤ e

28. 그림과 같이 $\overline{AB}=9$, $\overline{AD}=3$ 인 직사각형 ABCD 모양의 종이가 있다. 선분 AB 위의 점 E와 선분 DC 위의 점 F를 연결하는 선을 접는 선으로 하여, 점 B의 평면 AEFD 위로의 정사영이 점 D가 되도록 종이를 접었다. $\overline{AE}=3$ 일 때, 두 평면 AEFD와 EFCB가 이루는 각의 크기가 θ 이다. $60 \cos \theta$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이고, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]



30. 좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 영역

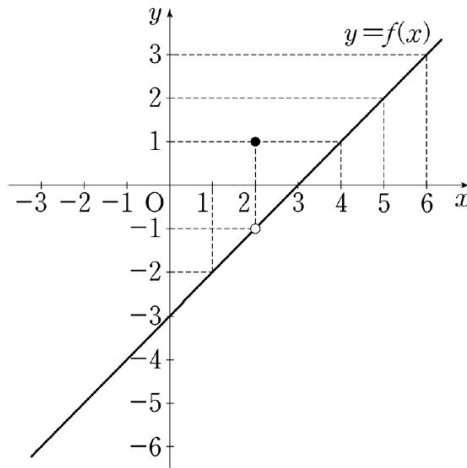
$$\{(x, y) \mid 2^x - n \leq y \leq \log_2(x+n)\}$$

에 속하는 점 중 다음 조건을 만족시키는 점의 개수를 a_n 이라 하자.

- (가) x 좌표와 y 좌표는 서로 같다.
- (나) x 좌표와 y 좌표는 모두 정수이다.

예를 들어, $a_1=2$, $a_2=4$ 이다. $\sum_{n=1}^{30} a_n$ 의 값을 구하시오. [4점]

6. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.

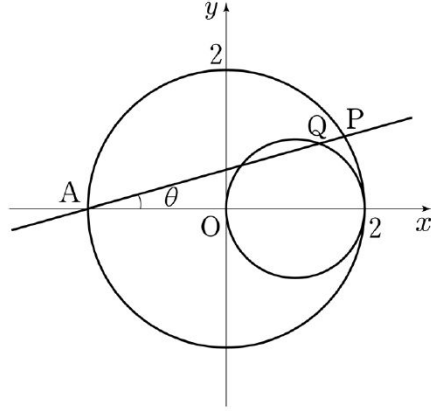


합성함수 $(f \circ f)(x)$ 가 $x=a$ 에서 불연속이 되는 모든 a 의 값의 합은? (단, $0 \leq a \leq 6$ 이다.) [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

20. 그림과 같이 점 $A(-2, 0)$ 과 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점 P 에 대하여 직선 AP 가 원 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 과 두 점에서 만날 때 두 점 중에서 점 P 에 가까운 점을 Q 라 하자.

$\angle OAP = \theta$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\overline{PQ}}{\theta^2}$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고

$$g'(x) \leq \frac{1}{3} \text{이다.}$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - g(x)}{(x-3)g(x)} = \frac{8}{9}$$

$f(1)$ 의 값은? [4점]

- ① -11 ② -9 ③ -7 ④ -5 ⑤ -3

25. 닫힌 구간 $[-1, 1]$ 에서 정의된 연속확률변수 X 의 확률밀도함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) f(-x) = f(x)$$

$$(나) \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{10}$$

$V(10X+3)$ 의 값을 구하시오. [3점]

28. 첫째항이 10인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n < a_{n+1}, \quad \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k)^2 = 2\left(1 - \frac{1}{9^n}\right)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 좌표공간에서 네 점 A_0, A_1, A_2, A_3 이 다음 조건을 만족시킨다.

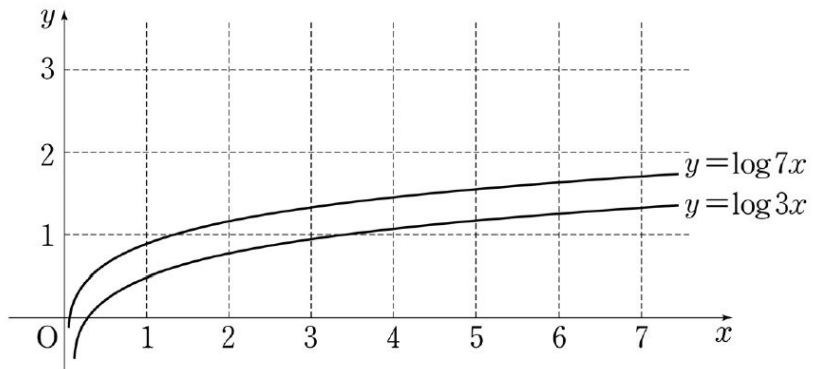
$$(가) \quad |\overrightarrow{A_0A_2}| = |\overrightarrow{A_1A_3}| = 2$$

$$(나) \quad \frac{1}{2} \overrightarrow{A_0A_3} \cdot \left(\overrightarrow{A_0A_k} - \frac{1}{2} \overrightarrow{A_0A_3} \right) = \cos \frac{3-k}{3} \pi \quad (k = 1, 2, 3)$$

$|\overrightarrow{A_1A_2}|$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M^2 의 값을 구하시오. [4점]

30. 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 정사각형 중 두 함수 $y = \log 3x$, $y = \log 7x$ 의 그래프와 모두 만나는 것의 개수를 구하시오. [4점]

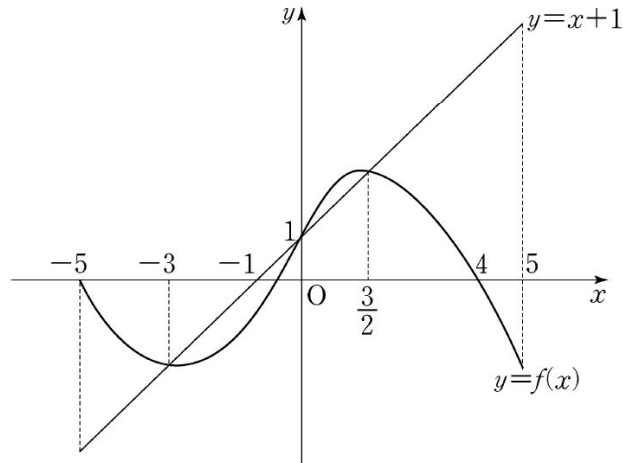
- (가) 꼭짓점의 x 좌표, y 좌표가 모두 자연수이고 한 변의 길이가 1이다.
 (나) 꼭짓점의 x 좌표는 모두 100 이하이다.



17. 닫힌 구간 $[-5, 5]$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 와 $y=x+1$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{xf(x)}$$

을 만족시키는 정수 x 의 개수는? [4점]



- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

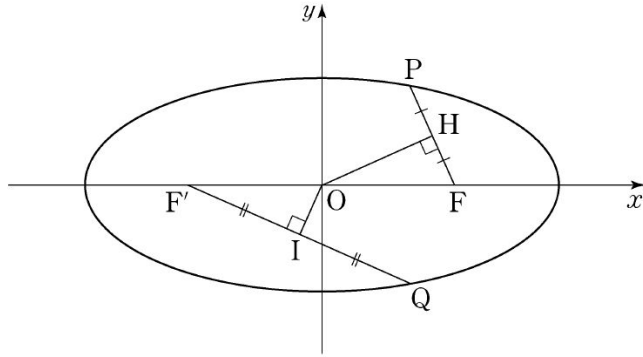
21. 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$ 과 실수 m 에 대하여
함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq mx) \\ mx & (f(x) < mx) \end{cases}$$

라 하자. $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때,
 m 의 값은? [4점]

- ① -14 ② -12 ③ -10 ④ -8 ⑤ -6

27. 두 점 $F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$ 을 초점으로 하는 타원 위의 서로 다른 두 점 P , Q 에 대하여 원점 O 에서 선분 PF 와 선분 QF' 에 내린 수선의 발을 각각 H 와 I 라 하자. 점 H 와 점 I 가 각각 선분 PF 와 선분 QF' 의 중점이고, $\overline{OH} \times \overline{OI} = 10$ 일 때, 이 타원의 장축의 길이를 l 이라 하자. l^2 의 값을 구하시오. (단, $\overline{OH} \neq \overline{OI}$) [4점]



30. 3보다 큰 자연수 n 에 대하여 $f(n)$ 을 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 a 라 하자.

(가) $a \geq 3$

(나) 두 점 $(2, 0)$, $(a, \log_n a)$ 를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 보다 작거나 같다.

예를 들어 $f(5) = 4$ 이다. $\sum_{n=4}^{30} f(n)$ 의 값을 구하시오. [4점]

19. 실수 m 에 대하여 점 $(0, 2)$ 를 지나고 기울기가 m 인 직선이 곡선 $y = x^3 - 3x^2 + 1$ 과 만나는 점의 개수를 $f(m)$ 이라 하자. 함수 $f(m)$ 이 구간 $(-\infty, a)$ 에서 연속이 되게 하는 실수 a 의 최댓값은? [4점]

- ① -3 ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 6

21. 좌표공간에서 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 ABC의 넓이는 6이다.

(나) 삼각형 ABC의 yz 평면 위로의 정사영의 넓이는 3이다.

삼각형 ABC의 평면 $x-2y+2z=1$ 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은? [4점]

① $2\sqrt{6}+1$

② $2\sqrt{2}+3$

③ $3\sqrt{5}-1$

④ $2\sqrt{5}+1$

⑤ $3\sqrt{6}-2$

28. 함수 $f(x) = 3(x-1)^2 + 5$ 에 대하여 함수 $F(x)$ 를

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 라 하자. 미분가능한 함수 $g(x)$ 가

모든 실수 x 에 대하여

$$F(g(x)) = \frac{1}{2}F(x)$$

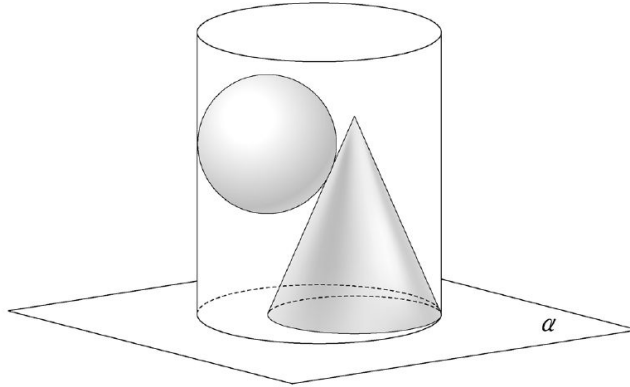
를 만족시킨다. $g'(2) = p$ 일 때, $30p$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 7인 원기둥과 밑면의 반지름의 길이가 5이고 높이가 12인 원뿔이 평면 α 위에 놓여 있고, 원뿔의 밑면의 둘레가 원기둥의 밑면의 둘레에 내접한다. 평면 α 와 만나는 원기둥의 밑면의 중심을 O , 원뿔의 꼭짓점을 A 라 하자. 중심이 B 이고 반지름의 길이가 4인 구 S 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S 는 원기둥과 원뿔에 모두 접한다.

(나) 두 점 A, B 의 평면 α 위로의 정사영이 각각 A', B' 일 때, $\angle A'OB' = 180^\circ$ 이다.

직선 AB 와 평면 α 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\tan\theta = p$ 이다. $100p$ 의 값을 구하시오. (단, 원뿔의 밑면의 중심과 점 A' 은 일치한다.) [4점]



30. 자연수 a, b 에 대하여 곡선 $y=a^{x+1}$ 과 곡선 $y=b^x$ 이

직선 $x=t$ ($t \geq 1$)와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.

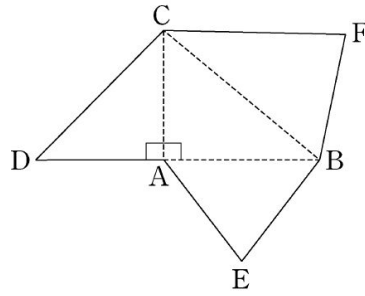
다음 조건을 만족시키는 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하시오. 예를 들어, $a=4, b=5$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

[4점]

(가) $2 \leq a \leq 10, 2 \leq b \leq 10$

(나) $t \geq 1$ 인 어떤 실수 t 에 대하여 $\overline{PQ} \leq 10$ 이다.

15. 그림은 $\overline{AC} = \overline{AE} = \overline{BE}$ 이고 $\angle DAC = \angle CAB = 90^\circ$ 인 사면체의 전개도이다.



이 전개도로 사면체를 만들 때, 세 점 D, E, F가 합쳐지는 점을 P라 하자. 사면체 PABC에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

- ㄱ. $\overline{CP} = \sqrt{2} \overline{BP}$
- ㄴ. 직선 AB와 직선 CP는 꼬인 위치에 있다.
- ㄷ. 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, 직선 PM과 직선 BC는 서로 수직이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 의 값은? [4점]

$$(가) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = 1$$

$$(나) \cos x \int_0^x f(t) dt = \sin x \int_x^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt \quad (\text{단, } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

21. 삼차함수 $y=f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 방정식 $f(x)-x=0$ 이 서로 다른 세 실근 α, β, γ 를 갖는다.
(나) $x=3$ 일 때 극값 7을 갖는다.
(다) $f(f(3))=5$

$f(f(x))$ 를 $f(x)-x$ 로 나눈 몫을 $g(x)$, 나머지를 $h(x)$ 라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

- ㄱ. α, β, γ 는 방정식 $f(f(x))-x=0$ 의 근이다.
ㄴ. $h(x)=x$
ㄷ. $g'(3)=1$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

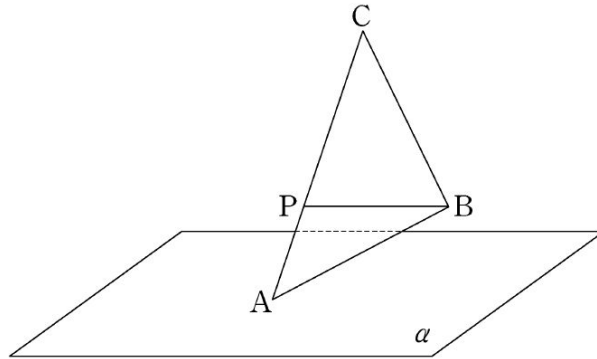
28. 첫째항이 12이고 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) $b_1 = 1$

(나) $n \geq 1$ 일 때, b_{n+1} 은 점 $P_n(-b_n, b_n^2)$ 을 지나고 기울기가 a_n 인 직선과 곡선 $y = x^2$ 의 교점 중에서 P_n 이 아닌 점의 x 좌표이다.

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 그림과 같이 평면 α 위에 점 A가 있고 α 로부터의 거리가 각각 1, 3인 두 점 B, C가 있다. 선분 AC를 1:2로 내분하는 점 P에 대하여 $\overline{BP}=4$ 이다. 삼각형 ABC의 넓이가 9일 때, 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S 라 하자. S^2 의 값을 구하시오. [4점]



30. 자연수 n 에 대하여 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이를 a_n 이라 하자.

- (가) 정사각형의 각 변은 좌표축에 평행하고, 두 대각선의 교점은 $(n, 2^n)$ 이다.
- (나) 정사각형과 그 내부에 있는 점 (x, y) 중에서 x 가 자연수이고, $y = 2^x$ 을 만족시키는 점은 3개뿐이다.

예를 들어 $a_1 = 12$ 이다. $\sum_{k=1}^7 a_k$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. 100 이하의 자연수 전체의 집합을 S 라 할 때, $n \in S$ 에 대하여
집합

$$\{k \mid k \in S \text{ 이고 } \log_2 n - \log_2 k \text{ 는 정수}\}$$

의 원소의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. 예를 들어, $f(10) = 5$ 이고
 $f(99) = 1$ 이다. 이때, $f(n) = 1$ 인 n 의 개수를 구하시오. [4점]

5. 좌표평면에서 점 $A(0, 4)$ 와 타원 $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 위의 점 P 에 대하여 두 점 A 와 P 를 지나는 직선이 원 $x^2 + (y-3)^2 = 1$ 과 만나는 두 점 중에서 A 가 아닌 점을 Q 라 하자. 점 P 가 타원 위의 모든 점을 지날 때, 점 Q 가 나타내는 도형의 길이는? [3점]

① $\frac{\pi}{6}$

② $\frac{\pi}{4}$

③ $\frac{\pi}{3}$

④ $\frac{2}{3}\pi$

⑤ $\frac{3}{4}\pi$

8. 함수

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & (x < -1) \\ 0 & (x = -1) \\ x^2 & (-1 < x < 1) \\ x-2 & (x \geq 1) \end{cases}$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

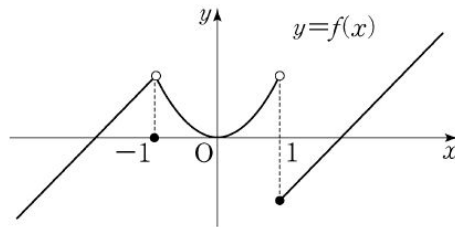
<보 기>

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 1+0} \{f(x) + f(-x)\} = 0$

ㄴ. 함수 $f(x) - |f(x)|$ 가 불연속인 점은 1개이다.

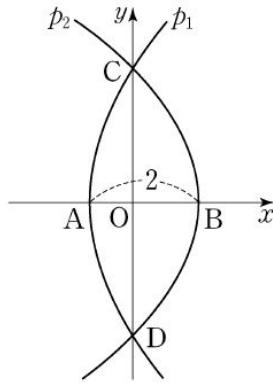
ㄷ. 함수 $f(x)f(x-a)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되는 상수 a 는 없다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



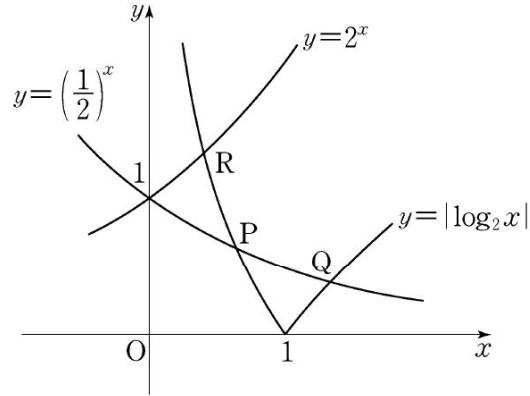
14. 그림과 같이 좌표평면에서 x 축 위의 두 점 A, B에 대하여 꼭짓점이 A인 포물선 p_1 과 꼭짓점이 B인 포물선 p_2 가 다음 조건을 만족시킨다. 이때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

- (가) p_1 의 초점은 B이고, p_2 의 초점은 원점 O이다.
 (나) p_1 과 p_2 는 y 축 위의 두 점 C, D에서 만난다.
 (다) $\overline{AB} = 2$



- ① $4(\sqrt{2}-1)$ ② $3(\sqrt{3}-1)$ ③ $2(\sqrt{5}-1)$
 ④ $\sqrt{3}+1$ ⑤ $\sqrt{5}+1$

16. 좌표평면에서 두 곡선 $y = |\log_2 x|$ 와 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 이 만나는 두 점을 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ($x_1 < x_2$)라 하고, 두 곡선 $y = |\log_2 x|$ 와 $y = 2^x$ 이 만나는 점을 $R(x_3, y_3)$ 이라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

- ㄱ. $\frac{1}{2} < x_1 < 1$
 ㄴ. $x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0$
 ㄷ. $x_2(x_1 - 1) > y_1(y_2 - 1)$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의
시각 $t(0 \leq t \leq 5)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가 다음과 같다.

$$v(t) = \begin{cases} 4t & (0 \leq t < 1) \\ -2t+6 & (1 \leq t < 3) \\ t-3 & (3 \leq t \leq 5) \end{cases}$$

$0 < x < 3$ 인 실수 x 에 대하여 점 P가

시각 $t=0$ 에서 $t=x$ 까지 움직인 거리,

시각 $t=x$ 에서 $t=x+2$ 까지 움직인 거리,

시각 $t=x+2$ 에서 $t=5$ 까지 움직인 거리

중에서 최소인 값을 $f(x)$ 라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서
있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

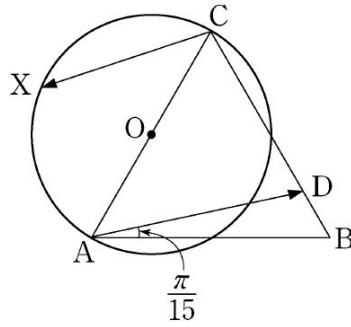
ㄱ. $f(1) = 2$

ㄴ. $f(2) - f(1) = \int_1^2 v(t) dt$

ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

22. 그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC와 선분 AC를
 지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 BC 위의 점 D를
 $\angle DAB = \frac{\pi}{15}$ 가 되도록 정한다. 점 X가 원 O 위를 움직일 때,
 두 벡터 \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{CX} 의 내적 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CX}$ 의 값이 최소가 되도록
 하는 점 X를 점 P라 하자. $\angle ACP = \frac{q}{p}\pi$ 일 때, $p+q$ 의 값을
 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



24. 최고차항의 계수가 1이고, $f(0) = 3$, $f'(3) < 0$ 인 사차함수 $f(x)$ 가 있다. 실수 t 에 대하여 집합 S 를

$$S = \{a \mid \text{함수 } |f(x) - t| \text{가 } x = a \text{에서 미분가능하지 않다.}\}$$

라 하고, 집합 S 의 원소의 개수를 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 $t = 3$ 과 $t = 19$ 에서만 불연속일 때, $f(-2)$ 의 값을 구하시오.

[4점]

25. 자연수 m 에 대하여 크기가 같은 정육면체 모양의 블록이 1열에 1개, 2열에 2개, 3열에 3개, ..., m 열에 m 개 쌓여 있다. 블록의 개수가 짝수인 열이 남아 있지 않을 때까지 다음 시행을 반복한다.

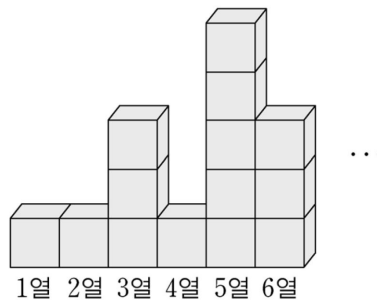
블록의 개수가 짝수인 각 열에 대하여 그 열에 있는 블록의 개수의 $\frac{1}{2}$ 만큼의 블록을 그 열에서 들어낸다.

블록을 들어내는 시행을 모두 마쳤을 때, 1열부터 m 열까지 남아 있는 블록의 개수의 합을 $f(m)$ 이라 하자.

예를 들어, $f(2) = 2$, $f(3) = 5$, $f(4) = 6$ 이다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^{n+1}) - f(2^n)}{f(2^{n+2})} = \frac{q}{p}$$

일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



28. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 있다.

모든 실수 x 에 대하여 $f(2x) = 2f(x)f'(x)$ 이고,

$$f(a) = 0, \int_{2a}^{4a} \frac{f(x)}{x} dx = k \quad (a > 0, 0 < k < 1)$$

일 때, $\int_a^{2a} \frac{\{f(x)\}^2}{x^2} dx$ 의 값을 k 로 나타낸 것은? [3점]

① $\frac{k^2}{4}$

② $\frac{k^2}{2}$

③ k^2

④ k

⑤ $2k$

11. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 있다. 2 이상인 자연수 n 에 대하여 폐구간 $[0, 1]$ 을 n 등분한 각 분점 (양 끝점도 포함)을 차례대로

$$0 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = 1$$

이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $n = 2m$ (m 은 자연수)이면 $\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f(x_{2k})}{m} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)}{n}$ 이다.

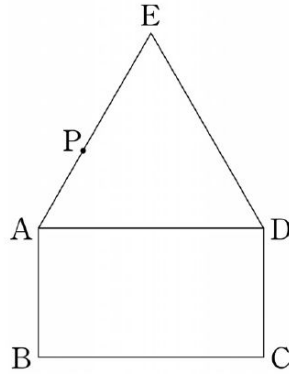
ㄴ. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left\{ \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right\} = \int_0^1 f(x) dx$

ㄷ. $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)}{n} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{n}$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
 ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

14. 평면에서 그림과 같이 $\overline{AB} = 1$ 이고 $\overline{BC} = \sqrt{3}$ 인 직사각형 ABCD와 정삼각형 EAD가 있다. 점 P가 선분 AE 위를 움직일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점]



<보 기>

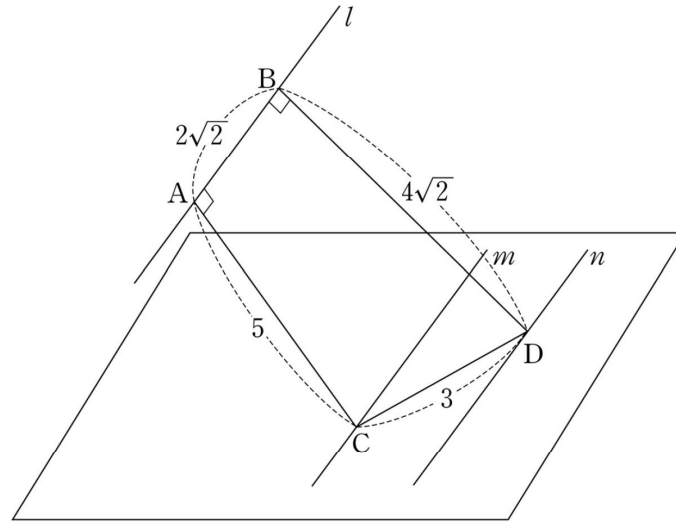
- ㄱ. $|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CP}|$ 의 최솟값은 1이다.
 ㄴ. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CP}$ 의 값은 일정하다.
 ㄷ. $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CP}|$ 의 최솟값은 $\frac{7}{2}$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

24. 주머니 안에 스티커가 1개, 2개, 3개 붙어 있는 카드가 각각 1장씩 들어 있다. 주머니에서 임의로 카드 1장을 꺼내어 스티커 1개를 더 붙인 후 다시 주머니에 넣는 시행을 반복한다. 주머니 안의 각 카드에 붙어 있는 스티커의 개수를 3으로 나눈 나머지가 모두 같아지는 사건을 A 라 하자. 시행을 6번 하였을 때, 1회부터 5회까지는 사건 A 가 일어나지 않고, 6회에서 사건 A 가 일어날 확률을 $\frac{q}{p}$ 라 하자. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

25. 같은 평면 위에 있지 않고 서로 평행한 세 직선 l, m, n 이 있다. 직선 l 위의 두 점 A, B, 직선 m 위의 점 C, 직선 n 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$, $\overline{CD} = 3$
- (나) $\overline{AC} \perp l$, $\overline{AC} = 5$
- (다) $\overline{BD} \perp l$, $\overline{BD} = 4\sqrt{2}$



두 직선 m, n 을 포함하는 평면과 세 점 A, C, D를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $15 \tan^2 \theta$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]

29. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 다음 표는 x 의 값에 따른 $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ 의 변화 중 일부를 나타낸 것이다.

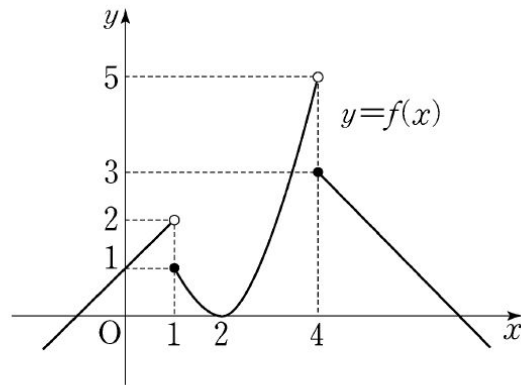
x	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$
$f'(x)$		0		1
$f''(x)$	+		+	0
$f(x)$		$\frac{\pi}{2}$		π

함수 $g(x) = \sin(f(x))$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>
ㄱ. $g'(3) = -1$
ㄴ. $1 < a < b < 3$ 이면 $-1 < \frac{g(b) - g(a)}{b - a} < 0$ 이다.
ㄷ. 점 $P(1, 1)$ 은 곡선 $y = g(x)$ 의 변곡점이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + \lim_{t \rightarrow -\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$ 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

23. 최고차항의 계수가 1이 아닌 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(1)$ 의 값을 구하시오. [4점]

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2 - f(x^2)}{x^3 f(x)} = 4$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = 4$$

25. 첫째항이 16이고 공비가 $2^{\frac{1}{10}}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\log a_n$ 의 가수를 b_n 이라 하자.

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_{k-1}, b_k, b_{k+1} + 1$$

이 주어진 순서로 등차수열을 이룰 때, k 의 값을 구하시오.
(단, $\log 2 = 0.301$ 로 계산한다.) [4점]

추가문항: 2014. 사관학교

19. 자연수 n 에 대하여 $\log n$ 의 지표를 $f(n)$, 가수를 $g(n)$ 이라 할 때, 좌표평면에서 점 A_n 의 좌표를 $(f(n), g(n))$ 이라 하자. 10보다 크고 1000보다 작은 두 자연수 k, m ($k < m$)에 대하여 세 점 A_1, A_k, A_m 이 한 직선 위에 있을 때, $k+m$ 의 최댓값은? [4점]

① 988

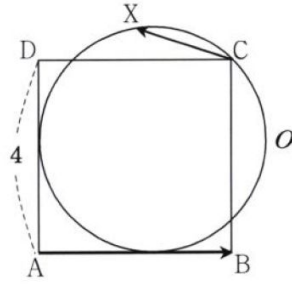
② 990

③ 992

④ 994

⑤ 996

29. 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD에서 변 AB와 변 AD에 모두 접하고 점 C를 지나는 원을 O 라 하자. 원 O 위를 움직이는 점 X 에 대하여 두 벡터 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CX} 의 내적 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CX}$ 의 최댓값은 $a - b\sqrt{2}$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 자연수이다.) [4점]



30. 함수 $f(x) = -xe^{2-x}$ 과 상수 a 가 다음 조건을 만족시킨다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$ 라 할 때,
 $x < a$ 이면 $f(x) > g(x)$ 이고, $x > a$ 이면 $f(x) < g(x)$ 이다.

곡선 $y=f(x)$ 와 접선 $y=g(x)$ 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $k-e^2$ 이다. k 의 값을 구하시오. [4점]