벡터의 외적(Cross Product)

벡터의 외적은 두 개의 삼차원벡터에 의해 정의된다. 두 삼차원벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 외적은 $\vec{a}\times\vec{b}$로 나타내고, 벡터의 외적은 벡터의 내적과 달리 또 다른 벡터이다. 이것을 구하는 방법을 알면 조금 복잡한 계산도 간단하게 할 수 있다. 벡터의 외적을 표시하는 방법을 알기 위해서는 먼저 3×3 행렬식에 대해 알아야 한다.

1. 행렬식

먼저 2×2 행렬식에 대하여 알아보자. 2×2 행렬식은 다음과 같이 실수 $2^2=4$개를 정사각형 모양으로 배열하고 양쪽에 절댓값 기호를 놓은 것으로 표현된다.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

이것을 계산하는 방법은 간단하다. 그냥 대각선으로 곱해서 빼주기만 하면 된다. 따라서 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$이다.

3×3 행렬식은 2×2 행렬식과 비슷하게 표현된다. 3×3 행렬식은 실수 $3^2=9$개를 정사각형 모양으로 배열하고 양쪽에 절댓값 기호를 놓은 것으로 표현된다.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

3×3 행렬식은 2×2 행렬식에 비해 계산이 좀 복잡하다. 먼저 1행, 1열의 실수들을 a를 제외하고 모두 지운다. 그러면 $\begin{vmatrix} a & & \\ & e & f \\ & h & i \end{vmatrix}$가 된다. 여기서 $\begin{vmatrix} e & f \\ g & i \end{vmatrix}$와 a를 곱해주면 된다. 따라서 계산 결과는 $a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$이다. 이와 같은 방법을 2열, 3열에도 해주면 된다.

1행, 2열의 숫자를 b를 제외하고 모두 지우면 $\begin{vmatrix} & b & \\ d & & f \\ g & & i \end{vmatrix}$이고, 1행, 3열의 숫자를 c를 제외하고 모두 지우면 $\begin{vmatrix} & & c \\ d & e & \\ g & h & \end{vmatrix}$이다. b만 남은 경우는 $\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$ 중간에 공백이 있으므로 -1을 곱해주어야 한다. 따라서 $-b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$이다. c만 남은 경우는 a만 남은 경우와 동일하다. 따라서 $c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$이다. 1행의 각 숫자가 남은 경우에 계산되는 값들을 모두 합해주면 3×3 행렬식은 계산된다. 따라서 3×3 행렬식 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$의 값은 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$이다.

2. 벡터의 외적의 계산법과 그 성질

두 벡터 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$의 외적은 3×3행렬식을 통해 다음과 같이 정의된다.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

(단, $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$)

이것을 계산하면 $\vec{a}\times\vec{b} = (y_1z_2 - y_2z_1, z_1x_2 - z_2x_1, x_1y_2 - x_2y_1)$이다. 여기서
$\vec{a} \cdot (\vec{a}\times\vec{b}) = x_1y_1z_2 - x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1 - x_1y_1z_2 + x_1y_2z_1 - x_2y_1z_1 = 0$
$\vec{b} \cdot (\vec{a}\times\vec{b}) = x_2y_1z_2 - x_2y_2z_1 + x_2y_2z_1 - x_1y_2z_2 + x_1y_2z_2 - x_2y_1z_2 = 0$
이므로, 벡터 $\vec{a}\times\vec{b}$는 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 동시에 수직인 벡터임을 알 수 있다.
두 벡터의 외적은 각 벡터에 동시에 수직인 벡터이다. 이 성질을 이용하면 여러 가지 계산을 빠르게 처리할 수 있다.

3. 벡터의 외적의 활용

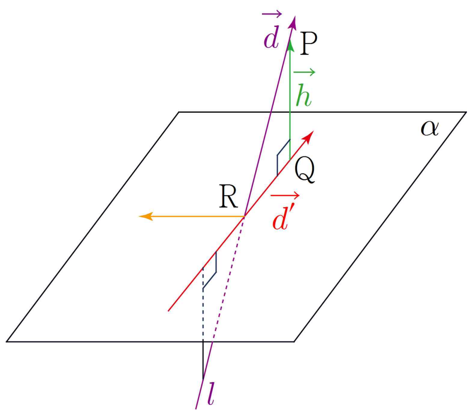
1. 두 평면 α, β의 교선의 방향벡터를 구하는 경우

교선은 두 평면에 모두 포함되는 직선이다. 즉, 직선 l이 평면 α와 β의 교선이면 직선 l은 평면 α, β에 모두 포함된다. 임의의 평면에 포함되는 직선은 그 평면의 수선과 항상 수직이다. 따라서 평면 α, β의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{h_1}$, $\overrightarrow{h_2}$라 하고 교선 l의 방향벡터를 $\vec{d}$라 하면 항상 $\overrightarrow{h_1} \cdot \vec{d} = 0$, $\overrightarrow{h_2} \cdot \vec{d} = 0$이다. 따라서 $\vec{d}$는 두 벡터 $\overrightarrow{h_1}$, $\overrightarrow{h_2}$에 모두 수직인 벡터이다. 즉, $\vec{d}$는 $\overrightarrow{h_1} \times \overrightarrow{h_2}$와 평행하다.

2. 한 점에서 만나는 두 직선 l, m이 결정하는 평면의 법선벡터를 구하는 경우

한 점에서 만나는 두 직선은 하나의 평면을 결정한다. 이 평면은 두 직선 l, m을 모두 포함한다. 따라서 이 평면의 법선벡터를 $\vec{h}$라 하고 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\overrightarrow{d_1}$, $\overrightarrow{d_2}$라 하면 항상 $\vec{h} \cdot \overrightarrow{d_1} = 0$, $\vec{h} \cdot \overrightarrow{d_2} = 0$이다. 따라서 $\vec{h}$는 두 벡터 $\overrightarrow{d_1}$, $\overrightarrow{d_2}$에 모두 수직인 벡터이다. 즉, $\vec{h}$는 $\overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{d_2}$와 평행하다.

3. 한 평면 α와 α에 평행하지 않은 직선 l의 평면 α위로의 정사영의 직선의 방향벡터를 구하는 경우



그림설명 : 임의의 직선 l과 평면 α가 있다. 빨간색 직선은 직선 l의 평면 α위로의 정사영이다. 주황색 직선은 보라색 직선과 녹색 직선에 의해 결정되는 평면의 법선벡터이다. 점 P는 보라색 직선과 녹색 직선의 교점이고, 점 Q는 녹색 직선과 빨간색 직선의 교점이다. 점 R는 평면 α와 직선 l의 교점이다.

그림과 같이 한 직선 l의 방향벡터를 $\vec{d}$라 하고 평면 α의 법선벡터를 $\vec{h}$라 하자. 직선의 평면 위로의 정사영이란, 직선 위의 모든 점을 평면 α 위로 정사영한 점들의 집합이 나타내는 직선을 말한다. 따라서 직선 l 위의 점 P에서 평면 α 위로의 정사영은 항상 빨간색 직선 위에 있게 된다. 세 점 P, Q, R는 하나의 평면을 결정한다. 이 평면에 녹색, 보라색, 빨간색 직선이 모두 포함된다. 따라서 이 평면의 법선벡터는 $\vec{d}\times\vec{h}$에 평행하다. 또, 한 평면에 포함되는 직선과 그 법선은 서로 수직이므로 주황색 직선은 빨간색, 보라색, 녹색 직선과 모두 수직이다. 즉, $\vec{d}\times\vec{h}$와 $\vec{h}$는 빨간색 직선의 방향벡터 $\vec{d'}$에 동시에 수직이다. 따라서 $\vec{d'}$은 $(\vec{d}\times\vec{h})\times\vec{h}$에 평행하다.

연습문제

1. 두 평면 $x+y+z=3$, $2x+y-2z=1$의 교선의 방향벡터가 $(-3,a,b)$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

2. 두 직선 $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{2}$, $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{2}$에 의해 결정되는 평면의 방정식을 구하시오.

3. 직선 $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{3}$의 평면 $x+2y+z=1$ 위로의 정사영의 직선의 방정식을 $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-1}{a}=\frac{z}{b}$라 할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.