수능에서 논술까지 한번에!

# 한권으로 완성하는 수학

# 적분과 통계 (상)

5개의 *Critical Point*로 수능 수학을 정복하고

9개의 심화특강으로 수능 수학의 풀이속도와 수리논술을 정복한다!

이해원 지음

All in One

## 저자 이해원

**연세대학교 수학과**
성광고등학교 졸업
2010 고려대학교 정보통신대학 합격
2011 연세대학교 이과대학 수학과 합격
2011 고려대학교 이과대학 수학과 합격
2012 고려대학교 사범대학 수학교육과 합격
2012 포카칩 모의평가 검토위원
2011 KICE 9월 모의평가 수학 100점
2012 KICE 대학수학능력시험 수학 100점
2012 Xi-story 자이스토리 수학 수기 저자
tbs 기적의 TV - 상담 받고 대학가자: 공부의 비법 <수리영역>편 출연

**주요 저서**
**수능에서 논술까지 한번에! 한권으로 완성하는 수학 - 수학$II$**
**수능에서 논술까지 한번에! 한권으로 완성하는 수학 - 기하와 벡터**
**수능에서 논술까지 한번에! 한권으로 완성하는 수학 - 적분과 통계**
수능에서 논술까지 한번에! 한권으로 완성하는 수학 - 수학1
수능에서 논술까지 한번에! 한권으로 완성하는 수학 - 미적분과 통계 기본
2013 난만한 모의평가 수리영역 가형

**저자 이해원이 주로 활동하는 곳 - (닉네임: 난만한)**
포만한 수리연구소 (pnmath.com)
오르비스 옵티무스 (orbi.kr)
공신닷컴 (gongsin.com)


### 이 책을 검토해주셔서 감사합니다.
김동하(연세대학교 수학과)
박종혁(연세대학교 수학과)
가철순(연세대학교 수학과)
허혁재(연세대학교 컴퓨터과학과)
이현기(연세대학교 화공생명공학부)
곽호연(서울대학교 수학교육과)
윤현욱(서울대학교 의예과)
박천익(한양대학교 기계공학부)
김희태(한양대학교 의예과)
신승호(한양대학교 공과대학)
김환철(한양대학교 컴퓨터공학부)
김용욱(서강대학교 전자공학부)
임동준(울산대학교 의예과)
김철현(상산고등학교)
최홍서(강릉고등학교)
원윤수(수지고등학교)
정상현(경기고등학교)
김세훈(동북고등학교)
이정범(동북고등학교)
박재석(성산고등학교)
김도헌(여의도고등학교)
한근희(중앙대학교 사범대학 부속고등학교)
윤태원
장재훈
김태훈
박주혁(메가스터디 재종반 강사)

### 집필에 도움을 주셔서 감사합니다.
임은성(연세대학교 수학과)
이덕영(연세대학교 수학과)
김태영(연세대학교 수학과)

## 한권으로 완성하는 수학을 펴내면서...

현재의 입시제도에서 성공적으로 대학교에 입학하기 위해서는 안타깝게도 수능과 논술을 모두 대비해야 합니다. 각 대학교에서 논술전형을 도입하기 시작하면서 학생들은 수능과 논술을 같이 준비해야하는 상황이 되었는데, 대부분의 학생들은 수리논술에 익숙하지 않아서 단 한 번의 서술조차 시도해보지 않은 경우가 많습니다.

또한 수리논술에서는 고교과정으로 이해는 할 수 있으나 평소에 수능 공부를 하면서 혼자서는 체득하기 힘든 개념이 제시문으로 나오는 경우가 많고, 또 그러한 개념으로 문제를 풀어야 하는 경우가 많습니다. 이런 이유로 대부분의 학생들이 논술 개념과 수능(교과서) 개념이 완전히 동 떨어져 있다고 생각해서, 수능 공부와 수리논술 공부를 별개로 생각합니다. 하지만 평소 수능 문제를 풀 때, 좀 더 논리적으로 서술해서 풀려고 노력하고, 문제의 깊은 곳에 숨겨져 있는 의미를 파악하는 연습을 하면 얼마든지 수능과 논술을 함께 대비할 수 있습니다. 하지만 학교나 학원을 다니기 바쁜 학생들의 입장에서 이러한 것을 제대로 공부할 기회가 없는 것이 사실입니다.

이 책에서는 먼저 수능 문제를 해결할 수 있는 $Critical\ \ Point$를 설명하고 있습니다.

여기서 공부하는 $CP$는 수능 문제를 해결하는 핵심이 됩니다. 또 이것을 실전에 적용하는 방법을 기출 예제에서 알려주고, 이를 스스로 연습할 수 있도록 기출 문제가 준비되어 있습니다.
그 이후 이 책의 하이라이트라고 할 수 있는 심화특강이 시작됩니다. 심화특강에서는 수능 문제를 빠르게 해결할 수 있는 이론과, 수능에서 논술로의 연결고리가 되는 개념을 매우 자세하게 알려줍니다. 이 부분을 완벽히 논리적으로 증명하고 이해한 후 다음 단계인 $Actual\ \ Fight$에 심화특강을 그대로 적용할 수 있는 수능형 문제(간혹 논술형 문제)가 준비되어 있습니다. 여기까지 왔으면 최종 단계인 논술 문제를 풀어야 합니다. 각 대학교의 기출 논술 문제와 각종 논술 문제가 들어가 있습니다. 여기까지 인내심을 가지고 모두 이해하고 공부한다면 수능에서는 원점수 100점을, 논술전형에서는 합격이라는 쾌거를 이룰 수 있을 것입니다.

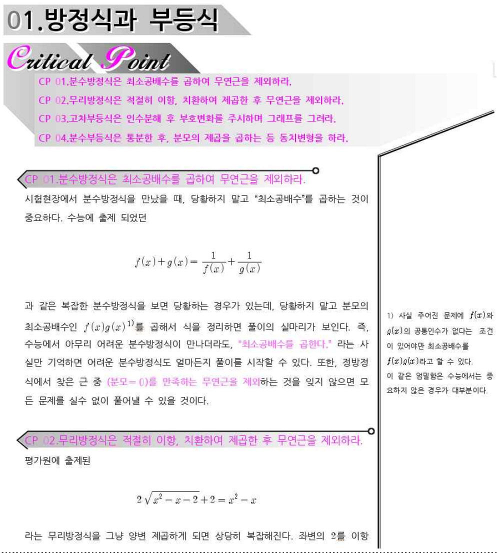
말 그대로 한 권으로 수능과 논술을 완성할 수 있습니다. 이 책은 수험생에게 **최고의 수능개념서이자 수능문제집**이고 **최고의 논술개념서이자 논술기출문제집**이 될 것입니다.
이 책으로 수학에 관련된 모든 것의 끝을 볼 수 있도록 구성했습니다.

논술문제에 대한 풀이 방법은 다양할 수 있습니다. 저의 풀이가 가장 좋은 풀이가 아닐 수 있고, 더 다양하고 좋은 풀이가 있을 수 있음을 알고 있습니다. 서로의 의견을 공유하고 싶다면 언제든지 포만한 수리 연구소**(pnmath.com)**에 글을 남겨 주시면 제 모든 수학 내공을 쏟아서 같이 고민하겠습니다. 또한 책에 대해 궁금한 점이나 잘 이해가 안 되는 것을 이 홈페이지에 찾아오셔서 질문하시면 제가 언제든지 **텍스트** 혹은 **동영상 강의**로 답변을 해드리겠습니다.

마지막으로 감사드려야 할 분이 너무 많습니다. 제가 이렇게 수학적으로 성장할 수 있도록 기틀을 마련해주신 성광고등학교의 문충환 선생님, 이 책의 가능성을 믿고 책을 출판해준 오르비의 박성준 사장님, 집필하는 동안 지겹다고 뻘글(?)을 쓰는 나를 받아준 오르비의 수많은 회원분들, 수학을 좋아하는 포만한 수리연구소의 회원분들, 연세대학교 수학과의 동기들, 내가 정말 아끼는 경북대학교 전자공학과의 친구들, 또한 가장 사랑하는 아버지, 어머니, 누나, 옆에서 책 쓰는 것을 제일 많이 지켜본 동생 정현이 까지 모두에게 감사하다는 말을 전하고 싶습니다.

**이 해 원**

# 이 책의 구성 및 특징



## 01.방정식과 부등식

**Critical Point**

CP 01.분수방정식은 최소공배수를 곱하여 무연근을 제외하라.
CP 02.무리방정식은 적절히 이항, 치환하여 제곱한 후 무연근을 제외하라.
CP 03.고차부등식은 인수분해 후 부호변화를 주시하며 그래프를 그려라.
CP 04.분수부등식은 통분한 후, 분모의 제곱을 곱하는 등 동치변형을 하라.

CP 01.분수방정식은 최소공배수를 곱하여 무연근을 제외하라.

시험현장에서 분수방정식을 만났을 때, 당황하지 말고 "최소공배수"를 곱하는 것이 중요하다. 수능에 출제 되었던

$$f(x)+g(x)=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)}$$

과 같은 복잡한 분수방정식을 보면 당황하는 경우가 있는데, 당황하지 말고 분모의 최소공배수인 $f(x)g(x)$[1]를 곱해서 식을 정리하면 풀이의 실마리가 보인다. 즉, 수능에서 아무리 어려운 분수방정식이 만나더라도, "최소공배수를 곱한다." 라는 사실만 기억하면 어려운 분수방정식도 얼마든지 풀이를 시작할 수 있다. 또한, 정방정식에서 찾은 근 중 (분모$=0$)를 만족하는 무연근을 제외하는 것을 잊지 않으면 모든 문제를 실수 없이 풀어낼 수 있을 것이다.

1) 사실 주어진 문제에 $f(x)$와 $g(x)$의 공통인수가 없다는 조건이 있어야만 최소공배수를 $f(x)g(x)$라고 할 수 있다. 이 같은 엄밀함은 수능에서는 중요하지 않은 경우가 대부분이다.

CP 02.무리방정식은 적절히 이항, 치환하여 제곱한 후 무연근을 제외하라.

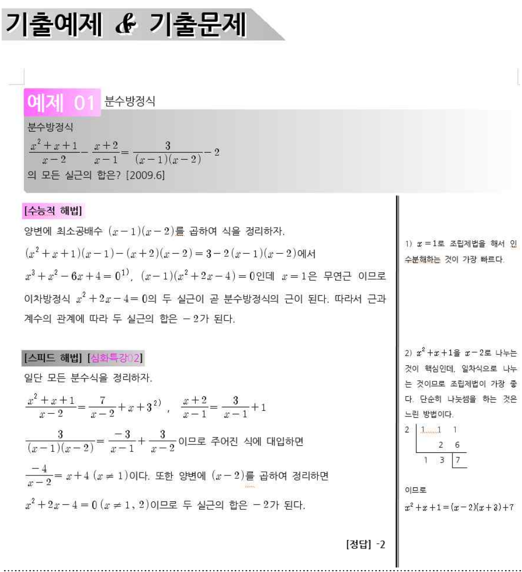
평가원에 출제된

$$2\sqrt{x^2-x-2}+2=x^2-x$$

라는 무리방정식을 그냥 양변 제곱하게 되면 상당히 복잡해진다. 좌변의 2를 이항

### 수능 *Critical Point*

수능 수학에서 가장 중요한 핵심이 설명되어 있다. 심화특강에서 다양한 수학적 이론을 배우게 되면 **[분석 및 해제]**의 **[스피드 해법]**과 같은 숙달된 풀이를 할 수 있게 되지만 결국 수능 수학에서는 여기서 배우는 *Critical Point*와 이것을 적용시킨 풀이인 **[수능적 해법]**이 가장 중요하다.



## 기출예제 & 기출문제

**예제 01** 분수방정식

분수방정식

$$\frac{x^2+x+1}{x-2}-\frac{x+2}{x-1}=\frac{3}{(x-1)(x-2)}-2$$

의 모든 실근의 합은? [2009.6]

**[수능적 해법]**

양변에 최소공배수 $(x-1)(x-2)$를 곱하여 식을 정리하자.

$(x^2+x+1)(x-1)-(x+2)(x-2)=3-2(x-1)(x-2)$에서

$x^3+x^2-6x+4=0$[1], $(x-1)(x^2+2x-4)=0$인데 $x=1$은 무연근 이므로 이차방정식 $x^2+2x-4=0$의 두 실근이 곧 분수방정식의 근이 된다. 따라서 근과 계수의 관계에 따라 두 실근의 합은 $-2$가 된다.

**[스피드 해법]** [심화특강02]

일단 모든 분수식을 정리하자.

$\frac{x^2+x+1}{x-2}=\frac{7}{x-2}+x+3$[2], $\frac{x+2}{x-1}=\frac{3}{x-1}+1$

$\frac{3}{(x-1)(x-2)}=\frac{-3}{x-1}+\frac{3}{x-2}$이므로 주어진 식에 대입하면

$\frac{-4}{x-2}=x+4\ (x\neq 1)$이다. 또한 양변에 $(x-2)$를 곱하여 정리하면

$x^2+2x-4=0\ (x\neq 1,2)$이므로 두 실근의 합은 $-2$가 된다.

**[정답]** -2

1) $x=1$로 조립제법을 해서 인수분해하는 것이 가장 빠르다.

2) $x^2+x+1$을 $x-2$로 나누는 것이 핵심인데, 일차식으로 나누는 것이므로 조립제법이 가장 좋다. 단순히 나눗셈을 하는 것은 느린 방법이다.

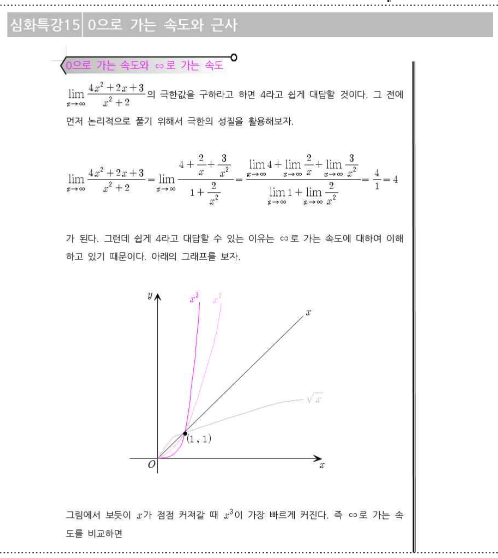
| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 1 |
| | | 2 | 6 |
| | 1 | 3 | 7 |

이므로

$x^2+x+1=(x-2)(x+3)+7$

### 기출예제 & 기출문제

일단 기출예제에서 직접 수능 *Critical Point*를 어떻게 적용시키는지 **[수능적 해법]**에서 알려준다. 또한 심화특강을 다 배운 후에 적용할 수 있는 풀이인 **[스피드 해법]**또한 제공한다. 이는 심화특강의 개념을 모두 이해하고 공부한 후에 이해할 수 있는 풀이가 되겠다. 또한 직접 적용해볼 수 있도록 수능, 평가원, 교육청 기출문제가 준비되어 있다.



## 심화특강15 0으로 가는 속도와 근사

0으로 가는 속도와 ∞로 가는 속도

$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2x+3}{x^2+2}$의 극한값을 구하라고 하면 4라고 쉽게 대답할 것이다. 그 전에 먼저 논리적으로 풀기 위해서 극한의 성질을 활용해보자.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2x+3}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim_{x\to\infty}4+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}{\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}}=\frac{4}{1}=4$$

가 된다. 그런데 쉽게 4라고 대답할 수 있는 이유는 ∞로 가는 속도에 대하여 이해하고 있기 때문이다. 아래의 그래프를 보자.

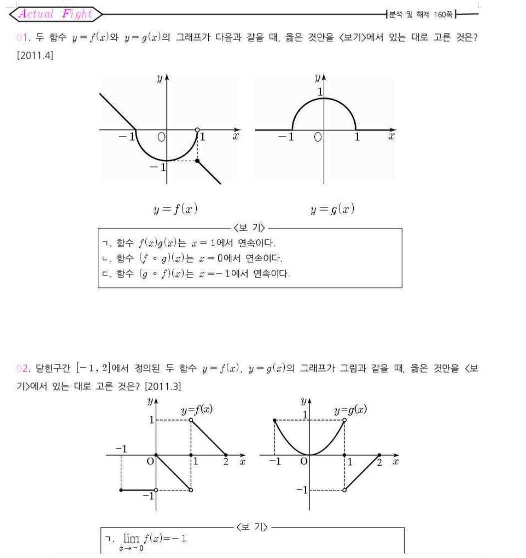


그림에서 보듯이 $x$가 점점 커져갈 때 $x^3$이 가장 빠르게 커진다. 즉 ∞로 가는 속도를 비교하면

### 심화특강

이 책의 하이라이트가 되는 파트이다.

수능 문제를 "논리적으로" 빠르게 해결할 수 있는 이론과 수능에서 논술로 연결되는 이론, 논술 문제를 해결할 수 있는 이론까지 모두 알려준다. 이 부분을 공부하고 이해하면 기출예제와 **[분석 및 해제]**에 있는 **[스피드 해법]**을 스스로 구사할 수 있는 실력을 키울 수 있다. 간혹 과학내용과의 연계 또한 다루고 있다.



Actual Fight ┃분석 및 해제 160쪽┃

01. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [2011.4]



〈보 기〉

ㄱ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $(f \circ g)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $(g \circ f)(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

02. 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [2011.3]

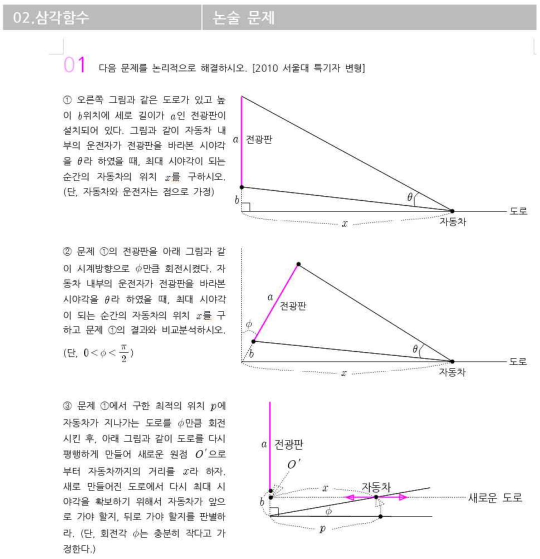


〈보 기〉

ㄱ. $\lim_{x \to -0} f(x) = -1$

## Actual Fight

심화특강에서 배운 이론을 적용할 수 있는 교육청, 사관학교, 경찰대 기출문제, 또 다양한 연습문제, 기출변형문제가 준비되어 있다. 여기 있는 문제를 풀면서 심화특강에서 공부한 수능 수학을 빨리 푸는 스킬과 개념을 다시 한 번 확인할 수 있으며 적용 능력을 키울 수 있다.



02.삼각함수 | 논술 문제

01 다음 문제를 논리적으로 해결하시오. [2010 서울대 특기자 변형]

① 오른쪽 그림과 같은 도로가 있고 높이 $b$위치에 세로 길이가 $a$인 전광판이 설치되어 있다. 그림과 같이 자동차 내부의 운전자가 전광판을 바라본 시야각을 $\theta$라 하였을 때, 최대 시야각이 되는 순간의 자동차의 위치 $x$를 구하시오. (단, 자동차와 운전자는 점으로 가정)

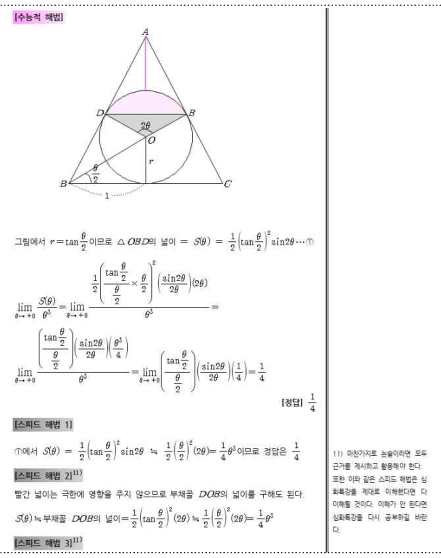
② 문제 ①의 전광판을 아래 그림과 같이 시계방향으로 $\phi$만큼 회전시켰다. 자동차 내부의 운전자가 전광판을 바라본 시야각을 $\theta$라 하였을 때, 최대 시야각이 되는 순간의 자동차의 위치 $x$를 구하고 문제 ①의 결과와 비교분석하시오. (단, $0<\phi<\frac{\pi}{2}$)

③ 문제 ①에서 구한 최적의 위치 $p$에 자동차가 지나가는 도로를 $\phi$만큼 회전시킨 후, 아래 그림과 같이 도로를 다시 평행하게 만들어 새로운 원점 $O'$으로부터 자동차까지의 거리를 $x$라 하자. 새로 만들어진 도로에서 다시 최대 시야각을 확보하기 위해서 자동차가 앞으로 가야 할지, 뒤로 가야 할지를 판별하라. (단, 회전각 $\phi$는 충분히 작다고 가정한다.)



## 논술 문제

앞서 심화특강을 모두 이해하고 제대로 공부했다면 이제 논술문제를 해결할 차례다. 서울대학교, 연세대학교, 고려대학교, 서강대학교, 한양대학교, 포항공과대학교, 홍익대학교 등 다양한 주요대학의 논술 기출 문제를 포함하고 있으며, 이 부분까지 완벽하게 공부하면 수능과 논술을 모두 대비할 수 있다.



[수능적 해법]

그림에서 $r=\tan\frac{\theta}{2}$이므로 $\triangle OBD$의 넓이 $= S(\theta) = \frac{1}{2}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2 \sin 2\theta \cdots ㉠$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\times\frac{\theta}{2}\right)^2\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\right)(2\theta)}{\theta^3}=$$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\right)\left(\frac{\theta^3}{4}\right)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)\left(\frac{\sin2\theta}{2\theta}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$$

[정답] $\frac{1}{4}$

[스피드 해법 1]

㉠에서 $S(\theta) = \frac{1}{2}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2\sin2\theta \fallingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2(2\theta)=\frac{1}{4}\theta^3$이므로 정답은 $\frac{1}{4}$

[스피드 해법 2][11]

빨간 넓이는 극한에 영향을 주지 않으므로 부채꼴 $DOB$의 넓이를 구해도 된다.

$S(\theta) \fallingdotseq$ 부채꼴 $DOB$의 넓이$=\frac{1}{2}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2(2\theta)\fallingdotseq\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2(2\theta)=\frac{1}{4}\theta^3$

[스피드 해법 3][11]

11) 마찬가지로 논술이라면 모두 근거를 제시하고 활용해야 한다. 또한 이와 같은 스피드 해법은 심화특강을 제대로 이해했다면 다 이해될 것이다. 이해가 안 된다면 심화특강을 다시 공부하길 바란다.

## 분석 및 해제

다른 시중 책의 해설과는 확연히 구분되는 파트이다.

먼저 **"기출문제"**에 대해서는 Critical Point을 적용한 **[수능적 해법]**과 심화특강을 적용한 **[스피드 해법]** 두 가지의 해법을 제공하고 더 다양한 풀이가 있다면 그 또한 모두 공개한다. (왼쪽 예제에서 네 가지 풀이를 하고 있다.)

그리고 "Actual Fight"에 대한 해제에서는 심화특강을 배운 그대로 적용하는 **[스피드 해법]**만을 제공하게 된다. 여기서 **[수능적 해법]**은 반드시 스스로 해보아야 한다.

마지막으로 **"논술문제"**에 대해서는 논리적 해법을 제공한다.

# 이 책을 통한 수험생들의 궁극적인 목표

## 반드시 읽어볼 것

## 1

이 책은 교과서, 익힘책 등의 기본서를 익히고 있다는 전제하에 집필되었다.
하지만 그 기본서 이후의 수능 100점, 수능문제를 빨리 푸는 방법, 논술전형 합격까지의 모든 과정을 이 책 하나가 맡고 있다. 따라서 독자는 **기본서**와 **"이 책"** 딱 두 권으로 논술과 수능을 모두 대비하면 된다.

## 2

이 책의 가장 큰 특징 중 하나는 **[분석 및 해제]**에서 **[수능적 해법]**과 **[스피드 해법]** 두 가지 해법을 제공하고, 필요할 때는 그 외의 **다양한 해법**을 제공하는 것이다.
여기서 **[수능적 해법]**이란 $\mathcal{C}ritical\ \ \mathcal{P}oint$을 적용한 교과서에 입각한 풀이가 된다.
그리고 **[스피드 해법]**은 심화특강을 적용한 수학적 지식이나 이론을 활용한 빠른 풀이이고 간혹 매우 심화적인 내용까지 동원해서 수능문제를 해결하는 해법이다.
다양한 심화특강을 배우고 또 그 이론을 터득하면 스스로 **[스피드 해법]**을 구사하게 되는데 실제 수능 현장에서 가장 중요한 것은 이러한 심화내용이 아닌 $\mathcal{C}ritical\ \ \mathcal{P}oint$와 **[수능적 해법]**이 된다. **[스피드 해법]**을 활용하면 수능 현장에서 **"시간 단축"**을 얻어낼 수 있지만 간혹 문제가 미궁에 빠질 수 있다. 하지만 **[스피드 해법]**에 대한 **"확신"**이 있다면 시험현장에서 그러한 풀이를 사용해서 시간을 단축하면 된다.
즉 수험생에게 내가 요구하는 것은 **[수능적 해법]**과 **[스피드 해법]**을 모두 공부하고 시험 현장에서는 **[수능적 해법]**위주로 생각을 하면 되고, 만약 **[스피드 해법]**에 대한 확신이 있다면 그 해법을 시험현장에서 사용해서 시간 단축을 이끌어 내는 것이다.
물론 그러한 확신이 생기려면 이 책을 매우 많이 반복하고 또 완벽하게 이해해야 한다.
또한 그렇게 공부를 해야 **[논술 문제]**까지 해결하는 능력이 길러질 것이고 그것이 내가 여러분들에게 궁극적으로 요구하는 것이 된다.
그렇게 될 때까지 이 책을 끝없이 반복하길 바란다.

## 3

모르는 문제가 나왔을 땐 일단 넘어가고, 책을 한 번 다 공부한 후 다시 나중에 풀어보는 것이 효율적이다. 이와 같이 세 번, 네 번 해도 문제 풀리지 않는다면 **[분석 및 해제]**를 보거나 포만한 수리연구소 (pnmath.com)에 찾아와서 난만한 Q&A에 와서 질문을 하면 **텍스트**나 **동영상 강의**의 답변을 받아볼 수 있다.

## 4

포만한 수리연구소 (pnmath.com)에서 **무료 동영상 강의**를 제공한다.
이해가 안 되는 개념은 강의를 보면 훨씬 공부하기 편할 것이다.

# Contents

# 적분과 통계 (상)

All in One

수학자의 명언

라플라스 (Laplace, 1749~1827)

“자연은 적분의 어려움을 웃어넘긴다.”

# 적분법

이 단원에서 배울 내용



수능에서 논술까지 한번에!
한권으로 완성하는 수학

저자의 잔소리

교과서와 익힘책은 꼭 먼저 풀어봐!

# 01.적분법

## Critical Point

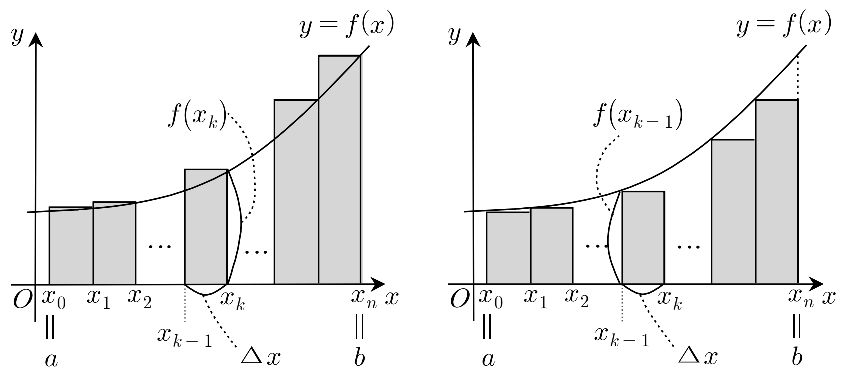
CP 01.정적분의 정의, 무한급수와 정적분의 관계를 정확히 이해하라.
CP 02.넓이, 부피(회전체), 길이의 정적분을 논리적으로 써내라.
CP 03.적분의 계산방법을 정확하게 적용하라.
CP 04.도형의 이동, 성질을 활용하여 정적분을 계산하라.
CP 05.정적분으로 정의된 함수, 적분과 미분의 관계를 파악하라.

### CP 01.정적분의 정의, 무한급수와 정적분의 관계를 정확히 이해하라.

먼저 **정적분의 정의**에 대하여 명확하게 배워보자.

아래 그림과 같이 함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 증가하면서 연속이라고 하자.[1]

1) 연속 감소함수인 경우에도 꼭 스스로 해보길 바란다.




이때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=a$, $x=b$, $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하기 위해 위 그림과 같이 구간 $[a,\ b]$를 $n$등분하여 양 끝점과 각 분점의 $x$좌표를 차례로

$$x_0=a,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots,\ x_n=b$$

라 하고, 구간 $[x_{k-1},\ x_k]$ $(k=1,2,3,\cdots,n)$의 길이를 $\Delta x$라 하면

$$\Delta x = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$$

이다.

또한 왼쪽 그림과 같이 $\Delta x$를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_k)$인 직사각형의 넓이[2]의 합을 $S_n$이라 하고, 오른쪽 그림과 같이 $\Delta x$를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_{k-1})$인 직사각형의 넓이의 합을 $T_n$이라 하면 [3]

$$S_n=f(x_1)\Delta x+\cdots+f(x_k)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)(x_k-x_{k-1})$$

$$T_n=f(x_0)\Delta x+\cdots+f(x_{k-1})\Delta x+\cdots+f(x_{n-1})\Delta x=\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})(x_k-x_{k-1})$$

2) $f(x_1)\Delta x$을 첫 번째 도형
$f(x_2)\Delta x$을 두 번째 도형
⋮
$f(x_k)\Delta x$을 $k$ 번째 도형
이라 하고, $k$ 번째 도형의 넓이를 구해서 $\sum$로 합한 것이다.
즉,
$k$번째 도형의 합
$=S_n=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$

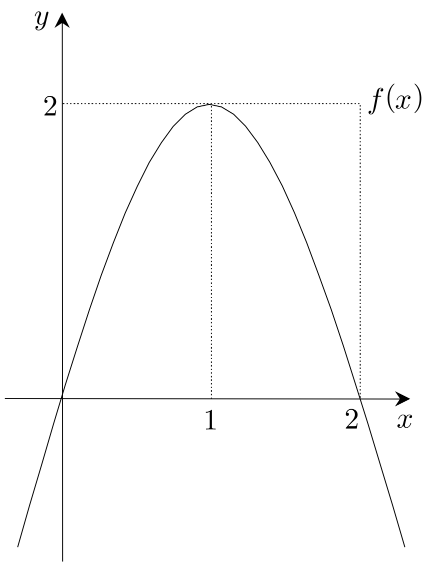
3) $S_n$은 $k$번째 직사각형의 넓이를 구할 때, 오른쪽에 있는 정의역 $x_k$에 대한 함숫값 $f(x_k)$를 활용하므로 우합이라 약속하고, $T_n$은 왼쪽에 있는 정의역 $x_{k-1}$에 대한 함숫값 $f(x_{k-1})$을 활용하므로 좌합이라고 약속하자.

## 최대, 최소에 의한 정의

먼저 간단한 예를 들어 공부해보자.

$f(x)=2x(2-x)$일 때, $t \leqq x \leqq t+1$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 한다. $g(t)$를 함수로 표현하시오.

여기서 새로운 함수 $g(t)$를 정의 했는데 일단 $f(x)$의 그래프를 그려보면 아래와 같다.




이제 $g(t)$를 해석해야 하는데 바로 직관으로 해석해내지 못할 경우 $t$에 숫자를 하나하나 대입해보는 것이 가장 현명한 방법이다. 그렇게 하나하나 대입하다보면 문제에서 묻는 것이 무엇인지 파악할 수 있다.

먼저 $g(-2)$를 구해보자. $g(-2)$는 $-2 \leqq x \leqq -1$에서 $f(x)$의 최댓값이므로 $f(-1)$과 같음을 그래프에서 확인할 수 있다.

마찬가지로 $g(-1)$은 $-1 \leqq x \leqq 0$에서 $f(x)$의 최댓값이므로 $f(0)$

$\cdots$ 이와 같이 $g(t)$에서 $t \leqq 0$일 때는 항상 $f(t+1)$과 같음을 알 수 있다.

또한 $t$에 0과 1사이의 값을 대입해보면 $g(0)=g\left(\frac{1}{3}\right)=g\left(\frac{2}{3}\right)=g(1)=2$

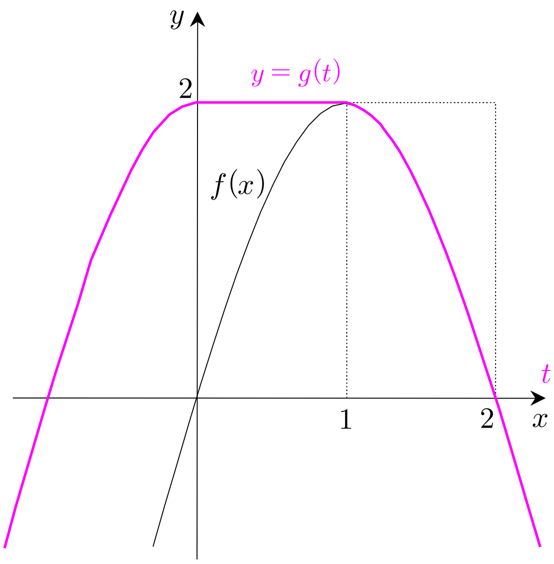
이 되고 $0 \leqq t \leqq 1$에서는 $g(t)=2$임을 알 수 있고

$t>1$에서는 $g(t)=f(t)$이므로 최종적으로 $g(t)$를 아래와 같이 정리할 수 있다.[1)]

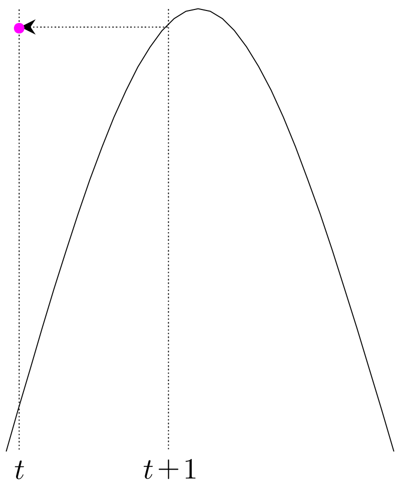
1) 이처럼 생소한 함수를 새롭게 정의할 때, 숫자를 하나하나 대입해보면 함수를 이해하기에 훨씬 수월하다.

$$g(t)=\begin{cases} f(t+1) & (t<0) \\ 2 & (0 \leq t < 1) \\ f(t) & (t \geq 1) \end{cases}$$

따라서 $y=f(x)$의 그래프 위에 겹쳐서 그려보면 아래와 같이 그릴 수 있다.[1)]




이처럼 생소한 함수가 정의 되었을 때 바로 이해하기가 어려우면 정의역을 하나씩 직접 대입해서 확인해보면 슬슬 함수에 대한 이해가 될 뿐 아니라 그래프의 개형도 완성할 수 있다. 사실 위와 같은 정의에 의한 함수는 아래와 같은 이해를 바탕으로 그리는 것이 가장 이상적인 방법이긴 하다.




그림과 같이 구간 $t \leq x \leq t+1$에서 $f(x)$의 최댓값을 정의역 $t$위에 찍고 $t$를 움직여가면서 그래프를 완성해나가면 $g(t)$의 개형을 금방 완성할 수 있을 것이다.[2)]

1) 여기까지의 과정은 고등학교 1학년 수준정도의 수학이다.
이 문제가 만약 수능에 출제 된다면

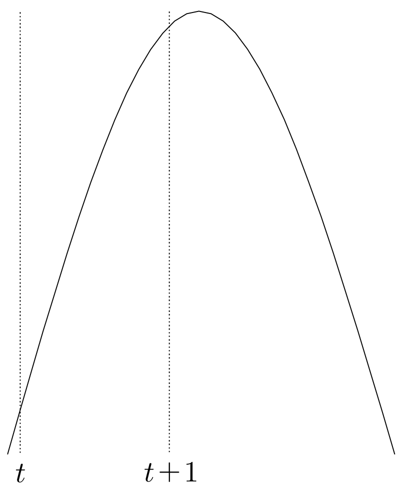
$f(x)=2x(2-x)$일 때,
$t \leq x \leq t+1$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 한다.
$\int_{-1}^{2} g(t)dt$의 값을 구하시오.

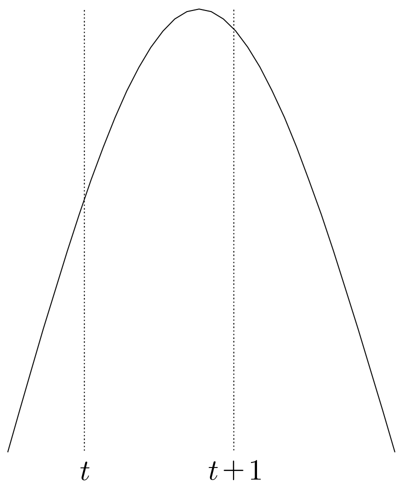
정도로 출제가 될 수 있다.

2) 이상적인 방법인데, 바로 이렇게 되지 않는다면 역시 숫자를 하나하나 대입하면서 새롭게 정의된 함수를 이해하는 것이 최우선이다.

하나의 예만 더 들어보자.

$f(x)=2x(2-x)$일 때, $t \leqq x \leqq t+1$에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차를 $g(t)$라 한다. $g(t)$를 함수로 표현하시오.



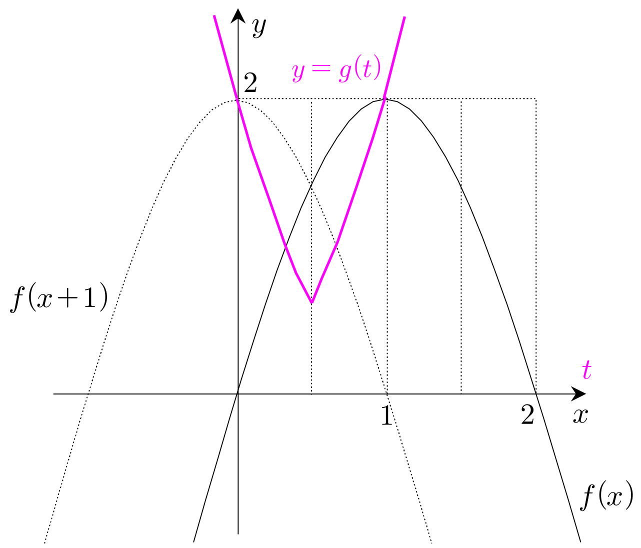

왼쪽 그림과 같이 $t \leqq 0$일 때는 $g(t)=f(t+1)-f(t)$

오른쪽 그림과 같이 $0<t \leqq \dfrac{1}{2}$일 때는 $g(t)=2-f(t)$

마찬가지로 $\dfrac{1}{2}<t \leqq 1$일 때는 $g(t)=2-f(t+1)$

$t>1$일 때는 $g(t)=f(t)-f(t+1)$

임을 알 수 있고 $f(t+1)-f(t)=2-4t$이므로 $g(t)$의 그래프를 그리면 아래와 같다.[1]




1) 이처럼 수능에서 어떠한 개형 $y=f(x)$를 출제할 때, 단순히 미분해서 개형을 완성하는 것이 아니라 최대, 최소를 이용해서 $y=f(x)$에 의하여 종속적인 새로운 함수를 정의해서 문제를 좀 더 어렵게 출제하기도 한다.

## 그래프의 교점의 개수, 실근의 개수에 의한 정의

마찬가지로 먼저 간단한 예를 들어 공부해보자.

> $f(x)=2x(2-x)$일 때, 방정식 $f(x)=t$의 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.
> $g(t)$를 함수로 표현하시오.

위 문제에서

$$g(t)=\begin{cases} 2 & (t<2) \\ 1 & (t=2) \\ 0 & (t>2) \end{cases}$$

임을 쉽게 알 수 있다.[1)]

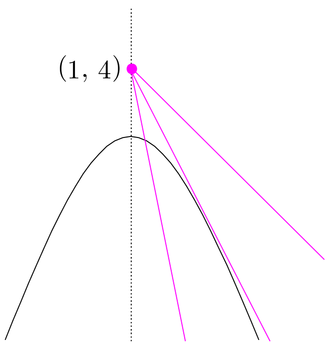
하나의 예를 더 들어보자.

> $f(x)=2x(2-x)$일 때, 방정식 $f(x)=t(x-1)+4$의 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.
> $g(t)$를 함수로 표현하시오.

위 문제는 그래프를 그려보면 결국 $(1,\ 4)$에서 함수 $f(x)$에 그은 접선과 관련이 있음을 알 수 있다.[2)]

따라서 곡선 밖의 점 $(1,\ 4)$에서 그은 접선을 찾아보자.
$y=f'(p)(x-p)+f(p)=(4-4p)(x-p)+2p(2-p)$에 $(1,\ 4)$을 대입하면
$1=p^2-2p+1+4p-2p^2$에서 $p(p-2)=0$이므로 $p=0,\ 2$임을 알 수 있다.
즉 $(1,\ 4)$에서 그은 접선의 기울기는 $f'(0)=4,\ f'(2)=-4$이다.

따라서 아래의 그림과 같이 $t<-4$일 때는 $g(t)=2$, $t=-4$일 때 $g(t)=1$, $-4<t<4$일 때 $g(t)=0$, $t=4$일 때 $g(t)=1$, $t>4$일 때 $g(t)=2$임을 알 수 있다.




1) 이해가 어렵다면 역시 $t=0,\ t=1,\ t=2,\ t=3\ \cdots$을 대입해보는 것이 최선의 함수 추론 방법이다.

2) $f(x)=t(x-1)+4$를

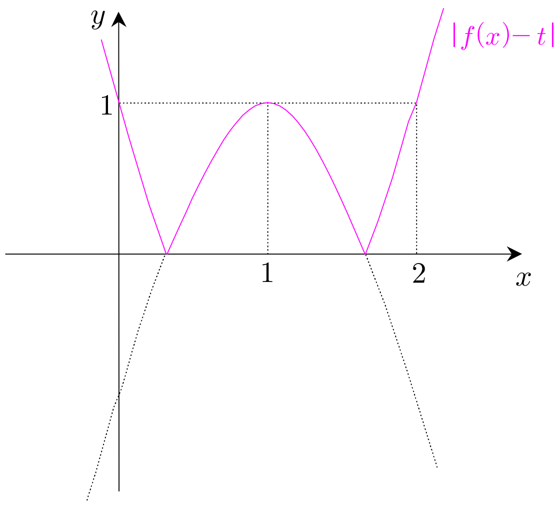
$$\frac{f(x)-4}{x-1}=t$$

으로 변형해서 $\frac{f(x)-4}{x-1}$의 그래프를 그리면 처음에 든 예시처럼 해결할 수도 있다.

## 미분 불가능 점의 개수에 의한 정의

$f(x)=2x(2-x)$일 때, 함수 $|f(x)-t|$이 미분 불가능이 되는 $x$값의 개수를 $g(t)$라 하자. $g(t)$를 함수로 표현하시오.

마찬가지로 $t=1$을 대입해보면 그림과 같이 미분 불가능 점이 2개임을 알 수 있다.




이와 같이 $t$의 값을 점점 크게 하면서 대입을 계속해보면
$t<2$일 때 $g(t)=2$, $t \geqq 2$일 때 $g(t)=0$임을 알 수 있다.

좀 더 문제를 어렵게 해보면 아래와 같다.

$f(x)=2x(2-x)$일 때, 함수 $|f(x)-\{t(x-1)+4\}|$이 미분 불가능이 되는 $x$값의 개수를 $g(t)$라 하자. $g(t)$를 함수로 표현하시오.

이 문제도 마찬가지로 $(1, 4)$에서 곡선에 그은 접선이 중요하다는 것을 알 수 있고 접할 때 $t$의 값은 $4$, $-4$이므로 아래와 같은 결론을 내릴 수 있다.

$$g(t)=\begin{cases} 0 & (|t| \leqq 4) \\ 2 & (|t|>4) \end{cases}$$

**이처럼 함수를 정의하는 다양한 방법을 배웠는데, 결국 수능에 어떤 새로운 정의가 출제될지는 아무도 모르기 때문에 이 심화특강에 있는 예시를 외우는 것은 전혀 쓸모가 없음을 명심하고 이 단원에 주어진 대표적인 상황을 대입을 통해서 차근히 이해하고 추론해나가는 연습을 해야 한다.**

## 정적분으로 정의된 함수[1]

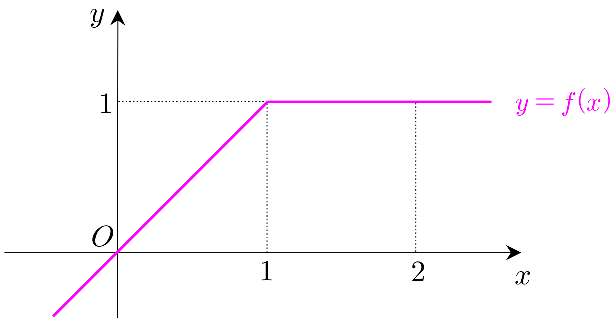
### 1. 정적분으로 정의된 함수에 대한 근본적인 이해

정적분으로 정의된 함수가 출제되면 아래와 같이 두 가지 식을 이끌어 내는 것이 가장 기본이다. 하지만 함수에 대한 근본적인 이해가 잘 안되어 있는 경우가 많다.

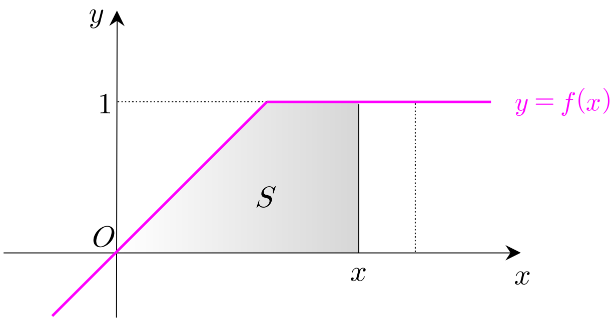
$$g(x)=\int_a^x f(t)dt \rightarrow g(a)=0,\ g'(x)=f(x)^{2)}$$

예를 들어

$g(x)=\int_0^x f(t)dt$일 때, $y=f(x)$의 그래프가 아래와 같이 그려진다고 하자.




여기서 $g(x)$의 그래프를 생각해보면 분명히 $x>0$에서 증가한다는 것을 바로 추측할 수 있어야 한다. 또한 $g(1)=\int_0^1 f(t)dt=\frac{1}{2}$, $g(2)=\int_0^2 f(t)dt=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ 임을 바로 바로 알 수 있다. 왜냐하면 함수 $g(x)$는 애초에 $y=f(x)$에서의 밑넓이를 의미하는 함수이기 때문이다.




즉 그림과 같이 넓이 $S$가 곧 $g(x)$ 되는 것이다. (즉, $g(x)=S$)[3]

**이처럼 단순 수식 2개를 유도하는 암기가 아닌 근본적인 이해가 되어있어야 한다.**

1) 앞서 CP05에서 배웠던 내용을 좀 더 심화적으로 공부한다고 생각하면 된다.

2) "변화율" 심화특강에서 $g'(x)=f(x)$에 대한 본질적인 이해를 해보자.

3) 즉, 넓이로 새롭게 정의된 함수라고 할 수 있고, 그 함수가 가지는 특징이 $g'(x)=f(x)$이 되는 것이다.

## 2. 정적분으로 정의된 함수의 응용

**① $g(x)=\int_a^x (x-t)f(t)dt$일 때**

과 같은 형태가 자주 출제되는데, 먼저 “함수 $g(x)$의 정의역(변수)”과 “적분변수”를 명백히 구분하는 것이 최우선이다.

$\int_a^x (x-t)f(t)dt$에서 적분변수는 $t$이므로 $x$는 상수취급을 해서 정적분의 성질을 적용하면

$\int_a^x (x-t)f(t)dt=\int_a^x \{xf(t)-tf(t)\}dt=\int_a^x xf(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$

$=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$이 된다.

이제 $g(x)=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$을 미분해야 하는데

$x$와 $\int_a^x f(t)dt$은 각각 “$x$에 대한 함수”이므로 $x\int_a^x f(t)dt$을 곱함수로 해석해서 곱의 미분법을 적용해야 한다.

즉 $g'(x)=\int_a^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_a^x f(t)dt$이 되고 $g''(x)=f(x)$임을 알 수 있다.
따라서 결론은 아래와 같다.

$$g(x)=\int_a^x (x-t)f(t)dt$$

$$\to\ g(a)=0,\ g'(x)=\int_a^x f(t)dt,\ g'(a)=0,\ g''(x)=f(x)$$

**② $g(x)=\int_a^{2x^2} tf(t)dt$일 때**

위와 같이 복잡하게 출제되면 헷갈리는 경우가 있는데,

$h(t)=tf(t)$와 같이 치환한 후 미적분의 기본정리 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$을 생각하는 것이 가장 좋은 방법이다.

즉 $g(x)=\int_a^{2x^2} tf(t)dt=\int_a^{2x^2} h(t)dt=H(2x^2)-H(a)$이므로

$g'(x)=4xh(2x^2)=4x\{2x^2f(2x^2)\}=8x^3f(2x^2)$임을 알 수 있다.
이처럼 치환과 미적분의 기본정리를 잘 활용하도록 하자.

### ③ $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt = f(a)$**에 대한 이해**

이 극한 또한 0/0꼴 극한이므로 아래의 세 가지 방법이 대표적인 해법이 된다.[1)]

첫 번째로 로피탈로 해결하면 가장 빠른 해결이 가능하다.

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1} = f(a)$$

두 번째로 기울기로 분석해보자.

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt = \lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a} = F'(a) = f(a)$$

이렇게 두 가지 방법이 있는데 복잡한 형태가 출제되더라도 위의 방법만 잘 지키면 모두 해결할 수 있다. 또한 가장 빠른 풀이 방법은 로피탈의 정리임을 알 수 있다. 예를 들어

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x^2-a}\int_a^{x^2} t^2 f(t)dt = \lim_{x\to a}\frac{x^4 f(x^2)\times 2x}{2x} = \lim_{x\to a} x^4 f(x^2) = a^4 f(a^2)$$

이 됨을  알 수 있다.

1) 한완수 수학2(상)
함수의 극한 심화특강에서
세 가지 방법에 대해 자세히
배울 수 있다.

① 로피탈
② 기울기 분석
③ 식변형

의 방법이 있는데
여기서는 ①~②의 방법이
가능하다.

분석 및 해제에는 심화특강의 개념을 활용한 풀이만 있으므로 정석적인 풀이는 반드시 스스로 해봐야 한다. 정석 풀이를 아는 사람만이 심화풀이를 할 자격이 있음을 명심해라.

## Actual Fight

분석 및 해제 108쪽

01. 실수 $a$에 대하여 집합

$$\{x | ax^2 + 2(a-2)x - (a-2) = 0,\ x\text{는 실수}\}$$

의 원소의 개수를 $f(a)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2010]

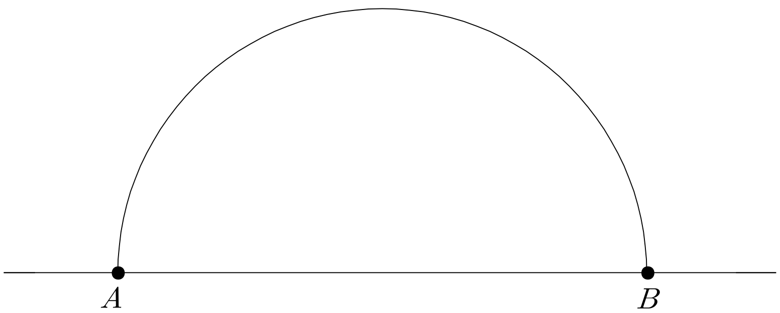
<보 기>

ㄱ. $\lim_{a \to 0} f(a) = f(0)$

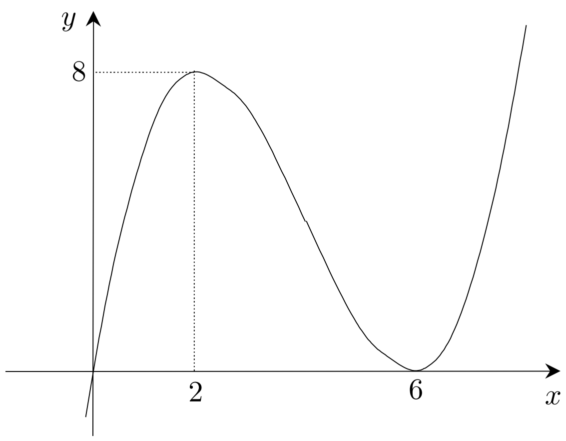
ㄴ. $\lim_{a \to c+0} f(a) \neq \lim_{a \to c-0} f(a)$인 실수 $c$는 2개이다.

ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 3개이다.

02. 아래와 같이 반지름이 2인 반원과 직선 $\overleftrightarrow{AB}$가 있다. 양수 $x$에 대해 $f(x)$를 반지름의 길이가 $x$인 원 중에서, 반원의 호 $\overset{\frown}{AB}$ 에 접하고 동시에 직선 $\overleftrightarrow{AB}$에 접하는 원의 개수라 할 때, $f(x) = 3(x-2)^2$의 실근의 개수는? ( 단, 양 끝점 $A, B$는 반원의 호에서 제외 )



03. 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래와 같다.




(1) 방정식 $f(x)=t$의 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

(2) 방정식 $f(x)=f(t)$의 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

(3) 방정식 $f(x)=tx$의 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

(4) 방정식 $f(x)=t(x-2)+10$의 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

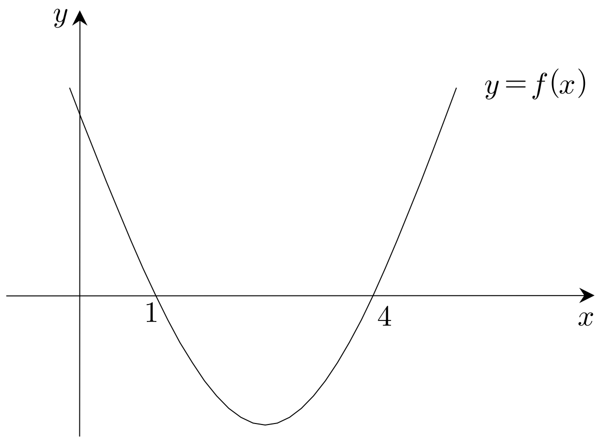
04. 실수 $m$에 대하여 점 $(0, 2)$를 지나고 기울기가 $m$인 직선이 곡선 $y=x^3-3x^2+1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty, a)$에서 연속이 되게 하는 실수 $a$의 최댓값은? [2012]

05. $x$에 대한 방정식 $\sqrt{(x-1)(3-x)}=mx$의 서로 다른 실근의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $y=f(m)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

06. 실수 $x$에 대하여 $t^2=x^3-x$를 만족시키는 실수 $t$의 개수를 $f(x)$라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프 개형을 완성하시오. [1994]

07. 아래 그림은 $y=f(x)$의 그래프이다. 함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1} f(t)dt$라 할 때, $g(x)$가 최소가 되는 $x$의 값은?

[1994]




08. 다항함수 $f(x)$가 $\int_{2}^{x} f(t)dt = x^2 + ax + 2$를 만족시킬 때, $f(10)$의 값을 구하시오/ [2000]

09. 다음 식을 만족하는 다항식 $f(x)$의 계수들의 합은? [2002]

$$f(f(x))=\int_{0}^{x} f(t)dt - x^2 + 3x + 3$$

10. 두 함수 $f(x)=ax+b$와 $g(x)=e^x$가

$$f(g(x))=\int_0^x f(t)g(t)dt-xe^x+3$$

을 만족할 때, $f(2)$의 값은? [2002]

11. 함수 $f(x)$는 연속함수이고 모든 실수 $x$에 대하여 다음 등식이 성립한다.

$$f(x)-2\int_0^x e^t f(t)dt=1$$

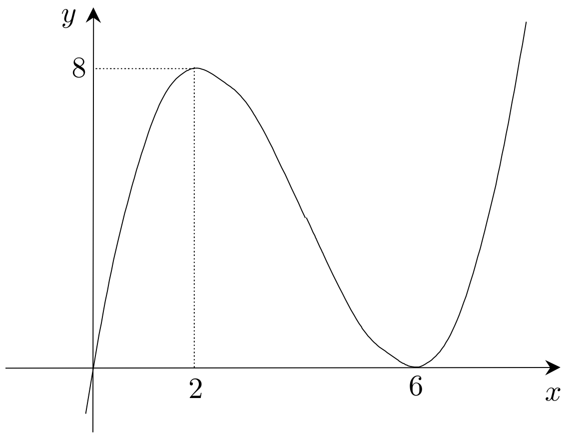
이때, $f''(0)$의 값은? (단, $e$는 자연로그의 밑이고, $f''(x)$는 $f(x)$의 이계도함수이다.) [2003]

12. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt=x^3-2ax^2+ax$$

를 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. (단, $a$는 상수이다.) [2007]

13. 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래와 같다.




(1) $x \leqq t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

(2) $t \leqq x \leqq t+2$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

(3) $t-3 \leqq x \leqq t+3$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

14. 함수 $f(x)=x(x-3)^2$과 실수 $t$에 대하여 $t \leqq x \leqq t+p$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 $t=a$에서 미분 불가능하다고 한다. $g(a) \geqq 4$일 때, $p$의 최솟값을 구하시오.

15. 삼차함수 $f(x)=x^3-3x-1$이 있다. 실수 $t(t \geqq -1)$에 대하여 $-1 \leqq x \leqq t$에서 $|f(x)|$의 최댓값을 $g(t)$라고 하자. $\int_{-1}^{1} g(t)dt=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$, $q$는 서로소인 자연수이다.) [2010]

16. 함수 $f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2(a>0)$과 실수 $t$에 대하여, $x \leqq t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 $a$의 최댓값은? [2010.9]

17. 함수 $f(x)=\begin{cases}-1 & (x<1)\\ -x+2 & (x\geq 1)\end{cases}$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{-1}^{x}(t-1)f(t)dt$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [2008.9]

<보 기>

ㄱ. $g(x)$는 구간 $(1, 2)$에서 증가한다.
ㄴ. $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
ㄷ. 방정식 $g(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 $k$가 존재 한다.

18. 실수전체의 집합에서 미분 가능한 함수 $f(x)$ 가

$$f(x)=e^{x}-1+\int_{0}^{x}f(t)\,dt$$

를 만족할 때, <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, $e$ 는 자연로그의 밑) [2005.10]

<보 기>

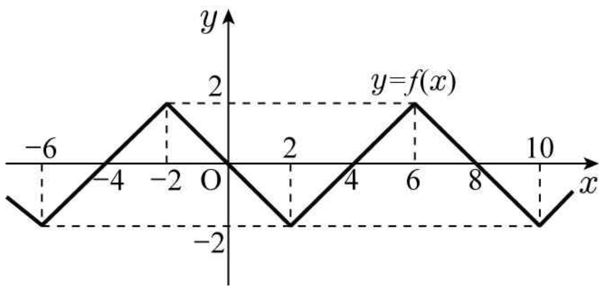
ㄱ. $f(0)=0$이다.
ㄴ. $f'(0)=0$이다.
ㄷ. 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)>f(x)$이다.

19. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| 모든 실수 $x$에 대하여<br>(가) $f(x)g(x)=x^3+3x^2-x-3$<br>(나) $f'(x)=1$<br>(다) $g(x)=2\int_1^x f(t)\,dt$ |

$\int_0^3 3g(x)\,dx$의 값을 구하시오. [2008.10]

20. 실수 전체의 집합에서 정의된 연속함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 일부가 그림과 같다.




실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$ 를 $g(x)=\int_x^{x+2} f(t)\,dt$ 라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2010.10]

| <보 기> |
|---|
| ㄱ. $g(-1)=0$<br>ㄴ. 함수 $g(x)$는 개구간 $(-2,\ 2)$에서 감소한다.<br>ㄷ. $-4\leq x\leq 6$에서 방정식 $g(x)=2$의 모든 실근의 합은 $4$이다. |

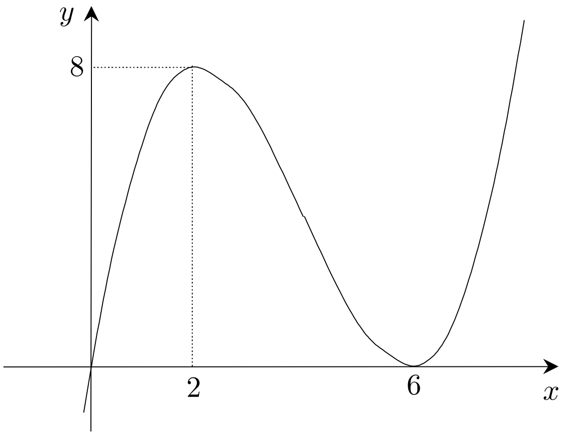
21. $x$에 대한 방정식 $\int_0^x |t-1|dt = x$의 양수인 실근이 $m+n\sqrt{2}$일 때, $m^3+n^3$의 값을 구하시오. (단, $m$, $n$은 유리수이다.) [2011.4]

22. 곡선 $y=6x^2+1$과 $x$축 및 두 직선 $x=1-h$, $x=1+h(h>0)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(h)$라 할 때, $\lim_{h \to +0} \frac{S(h)}{h}$의 값을 구하시오. [2008]

23. $f(x)=2x(2-x)$일 때, $t \leqq x \leqq t+1$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 한다. $\int_{-1}^{2} g(t)dt$의 값을 구하시오.

24. $f(x)=2x(2-x)$일 때, $t \leqq x \leqq t+1$에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차를 $g(t)$라 한다. $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} g(t)dt$의 값을 구하시오.

25. 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래와 같다.




(1) 함수 $|f(x)-t|$이 미분불가능이 되는 $x$의 개수를 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

(2) 함수 $|f(x)-f(t)|$이 미분불가능이 되는 $x$의 개수를 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

(3) 함수 $|f(x)-tx|$이 미분불가능이 되는 $x$의 개수를 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

(4) 함수 $|f(x)-\{t(x-2)+10\}|$이 미분불가능이 되는 $x$의 개수를 $g(t)$라 할 때, $y=g(t)$의 그래프의 개형을 완성하시오.

26. 삼차함수 $f(x)=\dfrac{1}{4}x(x-6)^2$에 대하여 함수 $p(x)=\left|f(x)-\left\{\left(\dfrac{f(t)-10}{t-2}\right)(x-2)+10\right\}\right|$이 미분불가능이 되는 $x$의 개수를 $g(t)$라 하자. $y=g(t)\,(t\neq 2)$에 대한 설명 중 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $g(1)=\lim\limits_{t\to 1}g(t)$

ㄴ. $g(4)=\lim\limits_{t\to 4}g(t)$

ㄷ. $a<t$에서 $g(t)$가 연속함수라 할 때, $a$의 최솟값은 10이다.

27. 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오. [2009.6]

| |
|---|
| (가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다. |
| (나) 함수 $\lvert f(x)-f(1)\rvert$은 오직 $x=a\,(a>2)$에서만 미분가능하지 않다. |

28. 최고차항의 계수가 $1$이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 $t$에 대하여 집합 $S$를

$$S=\{a\,|\,\text{함수 } |f(x)-t|\text{가 } x=a\text{에서 미분가능하지 않다.}\}$$

라 하고, 집합 $S$의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [2011]

29. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

| |
|---|
| 가. 직선 $g(x)=x+10$과 $x=0$, $x=6$에서 접한다. |
| 나. 함수 $h(x)=\lvert f(x)-g(x)-g(0)\rvert$는 $x=a$, $x=b$ $(a<0,\ b>6)$를 제외한 모든 구간에서 미분가능하다. |

두 조건을 만족할 때, 최고차항 계수의 최댓값은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$, $q$는 서로소인 자연수이며, $a<0$, $b>6$)

30. 최고차항의 계수가 1인 함수 $f(x)$는 $(x-3)^2(x+3)^2$으로 나누어 떨어지고 그 때의 몫은 이차식인 $P(x)$이다. 함수 $y=|f(x)|$가 모든 실수에서 미분가능 하다고 할 때, $g(x)=|f(x)+a|$에 대하여 함수 $g(x)$가 모든 실수에서 미분가능하기 위한 양의 실수 $a$의 최솟값을 구하시오. (단, 방정식 $P(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.)

31. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=\left|\int_0^x f(x)dx\right|$이 아래의 조건들을 만족시킨다.

| |
|---|
| 가. $0<a<b$인 두 상수 $a$, $b$에 대하여 $f(a)=f(b)=0$이고, $\int_0^b f(x)dx \leqq 0$이다. |
| 나. 함수 $y=g(x)$은 $x=1$에서 극댓값을 갖는다. |
| 다. 함수 $y=g(x)$은 $x=0$이 아닌 모든 점에서 미분가능하다. |

이 때, $\dfrac{g'(5)}{g(1)}$의 값을 구하시오.

32. 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 $t$에 대하여 집합 $S$를

$$S=\{a \mid \text{함수 } |f(x)-f(t)|\text{가 } x=a\text{에서 미분가능하지 않다.}\}$$

라 하고, 집합 $S$의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=0$, $t=p$, $t=4$에서만 불연속일 때, $\dfrac{f'(6)}{f'(3)}$의 값을 구하시오. (단, $0<p<3$)

이 특강의 목표

1. 새로운 함수가 나왔을 때, 정의역을 하나씩 대입해가며 추론할 수 있다.
2. 정적분으로 정의된 함수를 근본적으로 이해할 수 있다.

저자의 특강 *Tip*

수능에 새로운 함수가 자주 출제되는데
어떠한 함수가 나오더라도 정의역을 하나씩 대입해보면
그 함수를 이해하고 문제를 해결해나갈 수 있음을 명심해.

빠른 정답

| 심화특강06 정답 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 01 | ㄴ,ㄷ | 13 | 해설 참조 | 25 | 해설 참조 |
| 02 | 4 | 14 | 3 | 26 | ㄷ |
| 03 | 해설 참조 | 15 | 17 | 27 | 12 |
| 04 | $\frac{15}{4}$ | 16 | 1 | 28 | 147 |
| 05 | 해설 참조 | 17 | ㄱ,ㄴ | 29 | 91 |
| 06 | | 18 | ㄱ,ㄷ | 30 | 729 |
| 07 | 2 | 19 | 27 | 31 | 6 |
| 08 | 17 | 20 | ㄱ,ㄷ | 32 | 10 |
| 09 | 3 | 21 | 9 | | |
| 10 | 4 | 22 | 14 | | |
| 11 | 6 | 23 | $\frac{14}{3}$ | | |
| 12 | 16 | 24 | $\frac{5}{2}$ | | |

## 01 [2010 인하대학교 모의논술 변형]

(가) 질량중심은 물체 전체의 질량의 중심점으로 전체 질량이 질량중심에 있는 것처럼 외부 계와 작용한다.

(나) 예를 들어, 직선 위에 질량이 $m$으로 같은 두 물체가 $x_1$, $x_2$에 놓여 있다고 하자. 이들 두 물체는 $x_1$과 $x_2$의 중간 지점인 $\frac{x_1+x_2}{2}$에 질량이 $2m$이 있는 것처럼 외부 계와 작용한다. 만일, 질량이 $m_1$, $m_2$로 서로 다른 물체가 각각 $x_1$, $x_2$에 놓여 있으면, 질량이 $m_1+m_2$인 물체가 질량 중심에 있는 것처럼 외부 계와 작용한다. 이런 경우 질량 중심은 어떻게 계산을 할까? 이것은 가중치를 갖는 평균으로 생각하여 구할 수 있다. 점 $x_1$에는 $\frac{m_1}{m_1+m_2}$의 가중치를 주고, 점 $x_2$에는 $\frac{m_2}{m_1+m_2}$의 가중치를 주어 질량 중심은 $\frac{m_1}{m_1+m_2}x_1+\frac{m_2}{m_1+m_2}x_2=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$로 계산할 수 있다. 특히, 질량이 $m_1=m_2$의 경우, 질량 중심은 $\frac{x_1+x_2}{2}$으로 앞에서 언급한 것과 같다. 일반적으로, 좌표공간에서 점 $(x_k,\ y_k,\ z_k)$ $(k=1,2,\cdots,n)$에 각각 질량이 $m_k$인 물체가 놓여 있을 경우, 이들의 질량중심은 아래와 같다.

$$\left(\frac{x_1m_1+x_2m_2+\cdots+x_nm_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n},\ \frac{y_1m_1+y_2m_2+\cdots+y_nm_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n},\ \frac{z_1m_1+z_2m_2+\cdots+z_nm_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}\right)$$

(다) 질량이 연속적으로 분포되어 있는 물체의 질량중심 $(\overline{x},\ \overline{y},\ \overline{z})$은 구분 구적법에 의한 부피 계산과 같은 방법을 응용하여 적분을 이용하여 구한다. 예를 들어 균일한 밀도 $\rho$를 가지고 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 연속체의 $x$ 방향의 질량중심 $\overline{x}$는 다음과 같이 구한다. 그림과 같이 $x$축 위의 구간 $[a,\ b]$를 $n$등분하여 양 끝점과 등분점의 $x$좌표를 각각

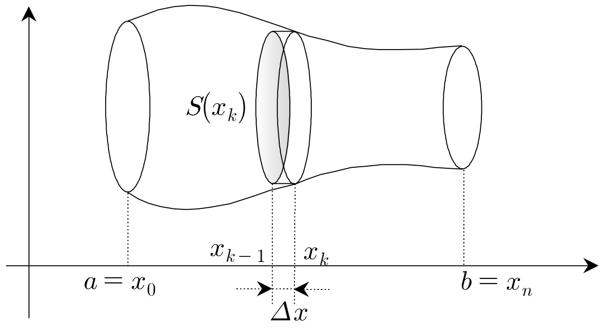
$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots\ ,x_{n-1},\ x=b$$

라 하고, 각 부분 구간의 길이를 $\triangle x=\frac{b-a}{n}$라 하자. 이 때 밑면의 넓이 $S(x_k)$, 높이가 $\triangle x$인 원기둥의 부피는 $S(x_k)\triangle x$이므로, 질량은 $\rho S(x_k)\triangle x$이다. 또한, 가중치를 적용한 좌표는 $\rho x_k S(x_k)\triangle x$이다. 따라서 질량중심의 $x$좌표 $\overline{x}$는

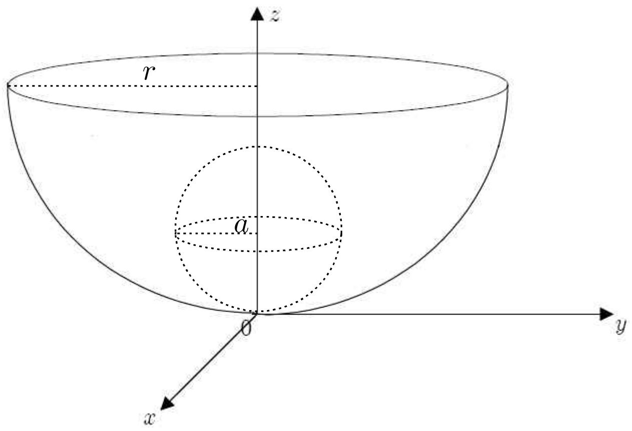
$$\frac{\sum_{k=1}^{n}\rho x_k S(x_k)\triangle x}{\sum_{k=1}^{n}\rho S(x_k)\triangle x}$$

으로 근사되며, $\triangle x\to 0$에 따른 극한을 취하여 다음을 구할 수 있다.

$$\overline{x}=\frac{\int_a^b \rho x S(x)dx}{\int_a^b \rho S(x)dx}$$




반지름이 $r$인 속이 비어 있는 반구 안에 반지름이 $a$인 속이 꽉 찬 구가 아래 그림과 같이 들어 있다. (단, $0 < 2a < r$).




① 이 용기에 물이 가득 들어 있을 때, 용기에 담긴 물의 총질량을 구하시오. (단, 물의 밀도는 상수 $\rho$이다.)

② 이 용기에 물이 가득 들어 있을 때, 용기에 담긴 물의 질량중심의 높이를 구하시오.
(단, 물의 밀도는 상수 $\rho$이다.)

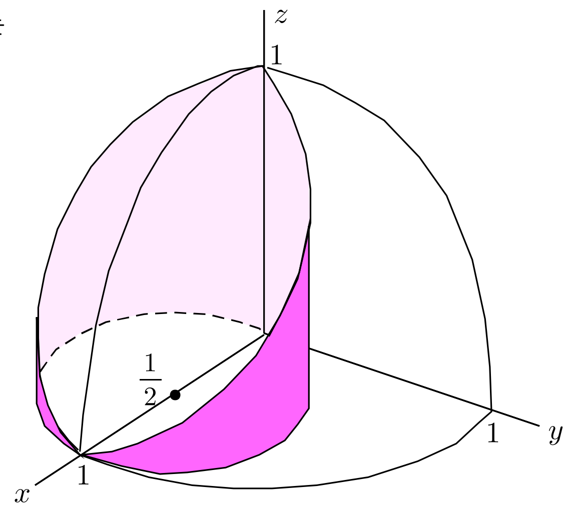
분석 및 해제
156쪽

## 02 [2010 서울대학교 특기자 변형]

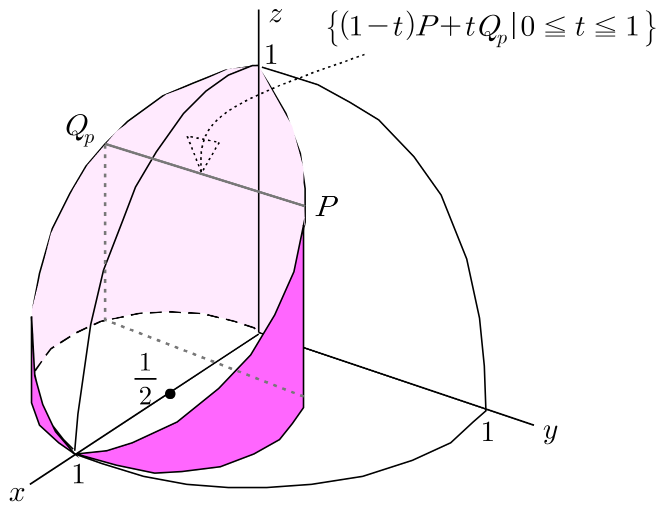
$xyz-$공간 $R^3$에서 $xz-$평면에 있는 함수 $z=\sqrt{1-x^2}\ (0\leqq x\leqq 1)$의 그래프를 $z$축을 중심으로 회전하여 얻은 곡면을 $S$라 하자. 또 $xy-$평면에 있는 중심이 $\left(\frac{1}{2},\,0,\,0\right)$이고 반지름이 $\frac{1}{2}$인 원을 $z$축을 따라 평행이동해서 얻은 원기둥의 표면을 $C$라 하자. 이 때 곡면 $S$와 원기둥의 표면 $C$의 교점들의 자취를 $S\cap C$로 표시한다.

① $S\cap C$를 나타내는 매개곡선 $\alpha:[0,\,2\pi]\to R^3$을 구하라.

② 원기둥의 표면 $C$중에서 아래로는 $z=0$, 위로는 $S\cap C$로 둘러싸인 곡면 $C_0$의 표면적을 구하라.




③ $S\cap C$에 있는 각 점 $P$에 대하여, 점 $P$의 $xz-$평면에 대한 대칭이동점을 $Q_p$라 하자. 원기둥의 표면 $C$, 평면 $z=0$ 그리고 다음 곡면 $\{(1-t)P+tQ_p\,|\,0\leqq t\leqq 1,\ P\in S\cap C\}$으로 둘러싸인 영역 $V$의 체적을 구하라.




④ 원기둥의 표면 $C$중에서 아래로는 $z=0$, 위로는 $S\cap C$로 둘러싸인 곡면 $C_0$를 $x$축을 중심으로 회전시켰을 때 생기는 입체의 부피를 구하라.