# 2019학년도 대학수학능력시험 모의평가 2회

# 수학 영역(가형) 해설지

Epsilon

## 정답 및 해설

1) [정답] ④ (출제자 : 17 문혁준)

[출제의도] 두 벡터의 차를 계산할 수 있는가?

[해설]

$\vec{a}-\vec{b}=(4-2,\ 3+1)=(2,\ 4)$ 이므로 구하는 값은 $2+4=6$ 이다.

2) [정답] ② (출제자 : 17 석진우)

[출제의도] 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+2x)}{2x}\times\frac{3x}{e^{3x-1}}\times\frac{2x}{3x}\right\}$$

$$=1\times 1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

3) [정답] ④ (출제자 : 18 권세은)

[출제의도] 지수함수의 적분을 할 수 있는가?

[해설]

$$\int_0^1 3^{x+1}dx=\left[\frac{3^{x+1}}{\ln 3}\right]_0^1=\frac{9}{\ln 3}-\frac{3}{\ln 3}=\frac{6}{\ln 3}$$

4) [정답] ⑤ (출제자 : 17 김국연)

[출제의도] 독립사건의 성질을 알고 이를 활용할 수 있는가?

[해설]

두 사건 $A$ 와 $B$ 는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)$ 이다.

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{4}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{4}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$$

이므로 $\frac{3}{4}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$ 에서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 $\mathrm{P}(B^C)=\frac{2}{3}$ 이다.

5) [정답] ① (출제자 : 17 김도훈)

[출제의도] 자연수의 분할을 이용하여 주어진 방법의 수를 구할 수 있는가?

[해설]

자연수 6 을 3 개의 자연수로 분할해보자.

$6=1+1+4=1+2+3=2+2+2$

3 개의 자연수로 분할하는 방법의 수는 3 이다.

자연수 6 을 2 개의 자연수로 분할해보자.

$6=1+5=2+4=3+3$

2 개의 자연수로 분할하는 방법의 수는 3 이다.

자연수 6 을 1 개의 자연수로 분할해보자.

$6=6$

1 개의 자연수로 분할하는 방법의 수는 1 이다.

따라서 분할하는 모든 방법의 수는 7 이다.

6) [정답] ② (출제자 : 17 김도훈)

[출제의도] 음함수의 미분법을 이용하여 곡선의 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

[해설]

$\ln(x^3y)+xy=3$ 을 $x$ 에 대하여 미분하면

$\dfrac{3x^2y+x^3\dfrac{dy}{dx}}{x^3y}+y+x\dfrac{dy}{dx}=0$ 이다.

위의 식에 $\left(e,\ \frac{1}{e}\right)$ 을 대입하면

$$\frac{3e+e^3\dfrac{dy}{dx}}{e^2}+\frac{1}{e}+e\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{e}+e\frac{dy}{dx}+\frac{1}{e}+e\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{2}{e^2}$$

따라서 구하는 접선의 기울기는 $-\frac{2}{e^2}$ 이다.

7) [정답] ⑤ (출제자 : 17 박승용)

**[출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 방정식의 해를 구할 수 있는가?**

[해설]

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ 이므로

방정식 $\dfrac{1}{2}\tan x + \cos x = \sec x$ 는 $\dfrac{\sin x}{2\cos x} + \cos x = \dfrac{1}{\cos x}$ 이고

양변에 $\cos x$ 를 곱하면 $\dfrac{1}{2}\sin x + \cos^2 x = 1$ 이다.

이때 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 이므로

$\dfrac{1}{2}\sin x + (1 - \sin^2 x) = 1$ 이다.

즉, $\dfrac{1}{2}\sin x - \sin^2 x = 0$ 이므로

$\sin x\left(\dfrac{1}{2} - \sin x\right) = 0$ 이다.

따라서 $\sin x = 0$ 또는 $\sin x = \dfrac{1}{2}$ 이다.

주어진 $x$ 의 값의 범위가 $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$ 이므로

$\sin x = 0$ 에서 $x = \pi$, $\sin x = \dfrac{1}{2}$ 에서 $x = \dfrac{5\pi}{6}$ 이다.

따라서 주어진 방정식의 모든 해의 합은 $\pi + \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{11\pi}{6}$ 이다.

8) [정답] ③ (출제자 : 17 김국연)

**[출제의도] 쌍곡선의 성질을 활용할 수 있는가?**

[해설]

쌍곡선의 두 초점 사이의 거리가 10 이므로

$2\sqrt{a^2+16} = 10$, 즉 $a^2 = 9$ 이다.

쌍곡선의 두 점근선의 방정식은 $y - 1 = \pm\dfrac{4}{3}(x-1)$ 이므로

$x$ 절편을 구하면 각각 $\dfrac{7}{4}$, $\dfrac{1}{4}$ 이다.

따라서 $\alpha = \dfrac{1}{4}$, $\beta = \dfrac{7}{4}$ 이므로 $\beta - \alpha = \dfrac{3}{2}$ 이다.

9) [정답] ② (출제자 : 17 조영호)

**[출제의도] 로그부등식의 계산을 할 수 있는가?**

[해설]

① 로그의 진수는 양수이므로, $x+2>0$ 과 $|x|+4>0$ 을 만족시켜야 한다. 따라서 $x>-2$ 이다.

② $\log_2(x+2) \le \log_4(|x|+4)$ 에서 로그의 밑을 4 로 통일시키면 $\log_4(x+2)^2 \le \log_4(|x|+4)$ 가 나온다.

$y = \log_4 x$ 는 증가함수이므로 $(x+2)^2 \le |x|+4$ 를 만족해야 한다. (⋯ [보충] 참고)

③ $x>-2$ 에서 $(x+2)^2 \le |x|+4$ 를 만족시키는 $x$ 의 값을 찾아보자.

(1) $x \ge 0$ 인 경우, $(x+2)^2 \le x+4$ 이므로 $x^2+3x \le 0$ 이다.
따라서 $-3 \le x \le 0$ 이므로 이를 만족시키는 $x$ 의 값은 0 뿐이다.

(2) $-2 < x < 0$ 인 경우, $(x+2)^2 \le -x+4$ 이므로 $x^2+5x \le 0$ 이다.
이를 만족시키는 $x$ 의 범위는 $-5 \le x < 0$ 이다.

①에서 구한 조건 $x>-2$ 와, ③에서 구한 $-5 \le x < 0$ 와 $x=0$ 을 연립하면, 가능한 $x$ 값은 $x=-1$, $x=0$ 으로 두 가지이다.

따라서 $\log_2(x+2) \le \log_4(|x|+4)$ 를 만족시키는 모든 정수 $x$ 의 개수는 2 이다.

[보충] 로그함수 $y = \log_a x$ 의 증가와 감소 비교

> $a>0$, $a \ne 1$이고, $x_1>0$, $x_2>0$에 대하여
> ❶ $a>1$일 때, $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Longleftrightarrow x_1 < x_2$
> ❷ $0<a<1$일 때, $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Longleftrightarrow x_1 > x_2$

출처: 이강섭 외 14인, 미래엔, 2009개정 교육과정 미적분2 23p

10) [정답] ① (출제자 : 18 김성찬)

**[출제의도] 표본평균의 표준화를 통하여 확률을 구할 수 있는가?**

[해설]

이 공장에서 생산한 시계 중 임의추출한 16 개의 시계의 무게의 표본평균을 $\overline{X}$ 라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X}) = 120$, $\sigma(\overline{X}) = \dfrac{1.6}{\sqrt{16}} = 0.4$ 이다.

이를 표준화시키면 $Z = \dfrac{\overline{X}-120}{0.4}$ 이다.

따라서

$\mathrm{P}(\overline{X} \ge 121)$

$= \mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{121-120}{0.4}\right)$

$= \mathrm{P}(Z \ge 2.5)$

$= \mathrm{P}(Z \ge 0) - \mathrm{P}(0 \le Z \le 2.5)$

$= 0.5 - 0.4938$

$= 0.0062$

이다.

11) [정답] ① (출제자 : 17 김도훈)

**[출제의도] 점과 평면 사이의 거리를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?**

[해설]

점 P 에서 평면 $\alpha$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

점과 평면 사이의 거리 공식을 이용하여 선분 PH 의 길이를 구하면

$\overline{\mathrm{PH}} = \dfrac{|2\times(-1) - 1\times 4 - 2\times 2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}} = \dfrac{10}{3}$ 이다.

삼각형 APH 에서 $\theta = \angle \mathrm{PAH}$ 이므로 $\sin\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{PH}}}{\overline{\mathrm{AP}}}$ 이고

$\sin\theta = \dfrac{5}{6}$, $\overline{\mathrm{PH}} = \dfrac{10}{3}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AP}} = 4$ 이다.

12) [정답] ② (출제자 : 17 김동규)

**[출제의도] 합의 법칙과 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수를 계산할 수 있는가?**

[해설]

① $a$가 홀수일 때

$|b-c|$의 값과는 무관하게 $a^{|b-c|}$의 값은 항상 홀수이다.
따라서 이를 만족시키는 경우의 수는 $3\times6\times6=108$이다.

② $a$가 짝수일 때

$a$가 짝수일 때 $a^{|b-c|}$의 값이 홀수인 경우는
$b-c=0$일 때 $a^{|b-c|}=a^0=1$인 경우뿐이다.
따라서 $a$가 짝수일 때 $b=c$이어야 하고
이를 만족시키는 경우의 수는 $3\times6\times1=18$이다.

두 경우의 수를 더하면 답은 126이다.

13) [정답] ③ (출제자 : 18 안동우)

**[출제의도] 역함수의 미분법을 이용하여 주어진 값을 계산할 수 있는가?**

[해설]

곡선 $y=g(x)$가 점 $(a,\,b)$를 지난다고 할 때, $g(a)=b$이다.
$g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 $f(b)=a$이다.

$g'(a)=\dfrac{1}{5}$이므로 역함수의 미분법에 의하여
$g'(a)=\dfrac{1}{f'(g(a))}=\dfrac{1}{f'(b)}=\dfrac{1}{5}$이다.
따라서 $f'(b)=5$이다.

함수 $f(x)=x^3-3x^2+5x-3$을 $x$에 대하여 미분하면
$f'(x)=3x^2-6x+5$이다.
$f'(b)=5$이므로 $3b^2-6b+5=5$이고
이를 정리하면 $3b(b-2)=0$이다.
따라서 $b=0$ 또는 $b=2$일 때, $g'(a)=\dfrac{1}{5}$을 만족시킨다.

$f(b)=a$이므로 $a=f(0)=-3$ 또는 $a=f(2)=3$이다.
$g'(a)=\dfrac{1}{5}$을 만족시키는 $a$의 값을 각각 $\alpha,\ \beta\ (\alpha>\beta)$라 했으므로
$\alpha=-3,\ \beta=3$이다.
$\therefore\ \beta-\alpha=6$

14) [정답] ② (출제자 : 18 김성찬)

**[출제의도] 속도와 가속도를 구하는 방법을 알고 이를 활용할 수 있는가?**

[해설]

점 P의 시각 $t\ (t>0)$에서의 위치 $\mathrm{P}(x,\,y)$가
$x=e^{-kt},\ y=t^3-12kt$이므로
$\dfrac{dx}{dt}=-ke^{-kt},\ \dfrac{dy}{dt}=3t^2-12k$이고
$\dfrac{d^2x}{dt^2}=k^2e^{-kt},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=6t$이다.

따라서 점 P의 시각 $t=1$에서의 속도 $\vec{v}$는
$\vec{v}=(-ke^{-k},\,3-12k)$이고
시각 $t=1$에서의 가속도 $\vec{a}$는
$\vec{a}=(k^2e^{-k},\,6)$이다.
시각 $t=1$에서의 점 P의 속도 $\vec{v}$와 가속도 $\vec{a}$가 평행하므로
$\vec{v}=s\vec{a}$ 이다. (단, $s$는 0이 아닌 실수)
$(-ke^{-k},\,3-12k)=s(k^2e^{-k},\,6)$이므로
$-ke^{-k}=s\times k^2e^{-k}$ , $3-12k=s\times6$이고,
$s=\dfrac{-ke^{-k}}{k^2e^{-k}}=\dfrac{3-12k}{6}$이다.
위의 식을 정리하면 $4k^2-k-2=0$이므로
근과 계수와의 관계를 이용하여 구한 가능한 $k$의 값의 합은 $\dfrac{1}{4}$이다.

15) [정답] ③ (출제자 : 18 김동현)

**[출제의도] 치환적분과 부분적분을 이용한 계산을 할 수 있는가?**

[해설]

$$\int_1^2\ln(x^3+3x^2+2x)\,dx=\int_1^2\{\ln x+\ln(x+1)+\ln(x+2)\}\,dx$$
$$=\int_1^2\ln x\,dx+\int_1^2\ln(x+1)\,dx+\int_1^2\ln(x+2)\,dx$$
$$=\int_1^2\ln x\,dx+\int_2^3\ln x\,dx+\int_3^4\ln x\,dx=\int_1^4\ln x\,dx$$
$$=[x\ln x-x]_1^4=4\ln4-4-(-1)=8\ln2-3$$

16) [정답] ⑤ (출제자 : 16 김민지)

**[출제의도] 주어진 상황을 해석하고 그 확률을 계산할 수 있는가?**

[해설]

게임을 2회 시행했을 때, A가 가져간 사탕이 B보다 많기 위해서는
A가 사탕을 총 6개 이상 가져가야 한다.

게임을 1회 시행했을 때 A가 가져갈 수 있는 사탕의 수는
1, 3, 5 중 하나이므로
게임을 2회 시행했을 때 A가 사탕을 총 6개 이상 가져가는 경우는

① 사탕을 6개 가져가는 경우
 i) 한 시행에서 사탕을 1개, 다른 시행에서 사탕을 5개 가져가는 경우
 ii) 각 시행 당 사탕을 3개씩 가져가는 경우

② 사탕을 8개 가져가는 경우
 ⇒ 한 시행에서 사탕을 3개, 다른 시행에서 사탕을 5개 가져가는 경우

③ 사탕을 10개 가져가는 경우
 ⇒ 각 시행 당 사탕을 5개씩 가져가는 경우

위와 같은 세 경우이다.

게임을 1 회 시행했을 때 A 가 가져갈 수 있는 사탕의 수의 각각의 확률은

(1) 5 개 가져갈 확률 : $\frac{1}{18}$

(2) 3 개 가져갈 확률 : $\frac{1}{6}$

(3) 1 개 가져갈 확률 : $\frac{10}{36}+\frac{18}{36}=\frac{7}{9}$

이다.

게임을 2 회 시행했을 때 A 가 사탕을 총 6 개 이상 가져가는 각각의 확률은

① 사탕을 6 개 가져가는 경우

$\frac{7}{9}\times\frac{1}{18}\times 2!+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{37}{324}$

② 사탕을 8 개 가져가는 경우

$\frac{1}{6}\times\frac{1}{18}\times 2!=\frac{1}{54}$

③ 사탕을 10 개 가져가는 경우

$\frac{1}{18}\times\frac{1}{18}=\frac{1}{324}$

이다.

따라서 A 가 가져간 사탕이 B 가 가져간 사탕보다 많을 확률은

$\frac{37}{324}+\frac{1}{54}+\frac{1}{324}=\frac{44}{324}=\frac{11}{81}$ 이다.

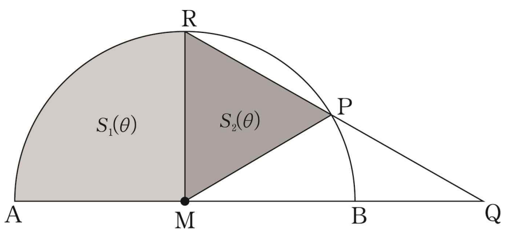
17) [정답] ③ (출제자 : 18 정우진)

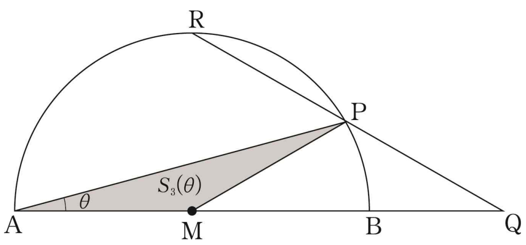
**[출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?**

[해설]

부채꼴 AMR 의 넓이를 $S_1(\theta)$, 삼각형 MPR 의 넓이를 $S_2(\theta)$, 삼각형 AMP 의 넓이를 $S_3(\theta)$ 라 할 때

$S(\theta)=S_1(\theta)+S_2(\theta)-S_3(\theta)$ 이다.




$\angle PAB=\theta$ 이므로 원주각의 성질에 의해 $\angle PMB=2\theta$ 이고

$\overline{PQ}=\overline{PM}=1$ 이므로 삼각형 PMQ 는 이등변삼각형이다.

따라서 $\angle PQM=\angle PMQ=2\theta$ 이다.

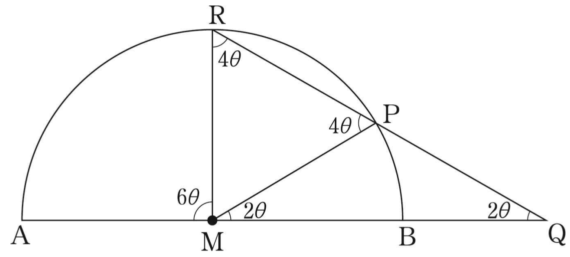
세 점 P, Q, R 는 한 직선 위에 있으므로 $\angle RPM=4\theta$ 이고

삼각형 PRM 는 $\overline{MP}=\overline{MR}=1$ 인 이등변삼각형이므로

$\angle PRM=4\theta$ 이다.

따라서 $\angle AMR=\angle PRM+\angle MQP=6\theta$ 이다.

이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.




$S(\theta)=S_1(\theta)+S_2(\theta)-S_3(\theta)$ 이므로

$S_1(\theta)$, $S_2(\theta)$, $S_3(\theta)$ 를 계산하면

$$S_1(\theta)=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\angle AMR$$
$$=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times 6\theta=3\theta$$
$$S_2(\theta)=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin(\angle PMR)$$
$$=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin(\pi-8\theta)=\frac{\sin 8\theta}{2}$$
$$S_3(\theta)=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin(\angle AMP)$$
$$=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin(\pi-2\theta)=\frac{\sin 2\theta}{2}$$

이고, $S(\theta)=S_1(\theta)+S_2(\theta)-S_3(\theta)=3\theta+\frac{\sin 8\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{2}$ 이다.

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{3\theta+\frac{\sin 8\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{2}}{\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{3\theta}{\theta}+\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin 8\theta}{2\theta}-\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin 2\theta}{2\theta}$$
$$=3+4-1=6$$

18) [정답] ⑤ (출제자 : 17 김도훈)

**[출제의도] 이면각의 정의와 삼수선의 정리를 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?**

[해설]

원 $C_2$ 를 포함하는 평면 $\alpha : z=-2\sqrt{3}$ 과 $xy$ 평면이 평행하므로

평면 ABP 와 $xy$ 평면이 이루는 이면각의 크기가 최소인 것은

두 평면 ABP 와 $\alpha$ 가 이루는 이면각의 크기가 최소인 것과 같다.

점 B 는 평면 $\alpha$ 위의 점이므로 점 B 는 두 평면 ABP 와 $\alpha$ 가 이루는 교선 $l$ 위의 점이라 볼 수 있다.

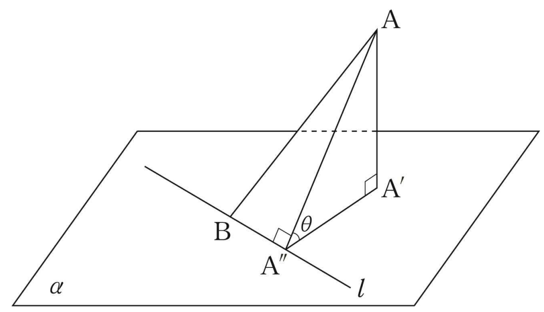
점 A 에서 평면 $\alpha$ 에 내린 수선의 발을 A′,

점 A′ 에서 직선 $l$ 에 내린 수선의 발을 A″ 이라 하자.

두 평면 ABP 와 $\alpha$ 가 이루는 이면각의 크기를 $\theta$ 라 하면

$\sin\theta=\frac{\overline{AA'}}{\overline{AA''}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BA''}^2}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{75-\overline{BA''}^2}}$ 이다.

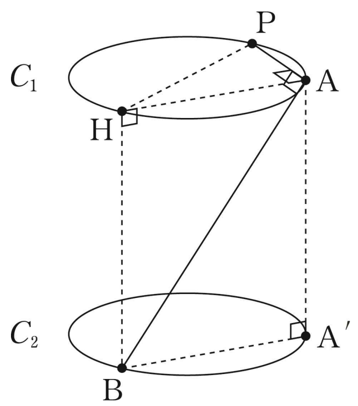
$\overline{BA''}=0$ 일 때 $\sin\theta$ 의 값이 최소이므로 $\theta$ 는 최솟값을 갖는다.




따라서 이면각의 크기는 $\angle ABA'$ 이어야 하고

점 P 는 평면 $\alpha$ 와 평행한 평면 $z=2\sqrt{3}$ 위의 점이므로

$\overline{AB}\perp\overline{AP}$ 를 만족시켜야 한다.




이제 삼각형 ABP 의 넓이를 구해보자.
점 B 에서 평면 $z=2\sqrt{3}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면
$\overline{AB}=5\sqrt{3}$ , $\overline{BH}=4\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{AH}=3\sqrt{3}$ 이다.
또한 $\overline{AB}\perp\overline{AP}$ 이므로 삼수선의 정리에 의해 $\overline{AH}\perp\overline{AP}$ 이고 이에 따라 선분 HP 는 원 $C_1$ 의 지름이다. 따라서 $\overline{HP}=6$ 이므로 $\overline{AP}=3$ 이다.
$\therefore \triangle ABP=\frac{1}{2}\times 5\sqrt{3}\times 3=\frac{15\sqrt{3}}{2}$

19) [정답] ④ (출제자 : 18 안동우)
**[출제의도] 조건을 해석하여 주어진 상황의 경우의 수를 구할 수 있는가?**

[해설]
자연수 $n$ 에 대하여 $|x_k|\le n$ 에서 $-n\le x_k\le n$ 이다. $(k=1,2,3)$

( i ) $x_1, x_2, x_3$ 가 전부 음이 아닌 정수인 경우
방정식 $x_1+x_2+x_3=n$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x_1, x_2, x_3$ 의 모든 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3)$ 의 개수는 서로 다른 3 개에서 중복을 허락하여 $n$ 개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$\boxed{{}_3\mathrm{H}_n}={}\boxed{{}_{n+2}\mathrm{C}_n}=\boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$ 임을 알 수 있다.

(ii) $x_1, x_2, x_3$ 중 음의 정수가 1 개인 경우
세 정수 $x_1, x_2, x_3$ 중 $x_1$ 만 음의 정수인 경우를 보기 위하여
$x_1=-t$ $(1\le t\le n)$ 이라 하자.
$x_1+x_2+x_3=n$ 이므로 $x_2+x_3=n+t$ 이다.
정수 $x_2, x_3$ 는 각각 $0\le x_2\le n$, $0\le x_3\le n$ 을 만족시키므로
$x_2+x_3=n+t$ 를 만족시키는 $x_2$ 의 최댓값은 $n$ 이고
$x_2$ 가 최댓값을 가질 때 $x_3$ 의 값은 $t$ 이다.
또 $x_2+x_3=n+t$ 를 만족시키는 $x_2$ 의 최솟값은 $t$ 이고
$x_2$ 가 최솟값을 가질 때 $x_3$ 의 값은 $n$ 이다.
따라서 $t\le x_2\le n$ 일 때에만 $x_2+x_3=n+t$ 를 만족시키는 $x_3$ 의 값이 존재한다.
$t$ 부터 $n$ 까지의 정수의 개수는 $n-t+1=\boxed{n+1}-t$ 이므로
모든 순서쌍 $(x_2, x_3)$ 의 개수는 $\boxed{n+1}-t$ 이다.
따라서 $x_1$ 이 음의 정수일 때 $x_1+x_2+x_3=n$ 을 만족시키는 모든 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3)$ 의 개수는
$\sum_{t=1}^{n}\left(\boxed{n+1}-t\right)=\frac{n(n+1)}{2}$ 이다.
이와 같은 방법으로 $x_2$ 만 음의 정수일 때와
$x_3$ 만 음의 정수일 때를 각각 계산하면
$x_1, x_2, x_3$ 중 음의 정수가 1 개일 때, 방정식 $x_1+x_2+x_3=n$ 을 만족시키는 모든 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3)$ 의 개수는
$\frac{3n(n+1)}{2}$ 임을 알 수 있다.

(iii) $x_1, x_2, x_3$ 중 음의 정수가 2 개 이상인 경우
$x_1$ 과 $x_2$ 가 음의 정수일 때를 보기 위하여
$x_1=-t_1$ $(1\le t_1\le n)$, $x_2=-t_2$ $(1\le t_2\le n)$ 이라 하자.
$x_1+x_2+x_3=n$ 이므로 $x_3=n+t_1+t_2$ 이다.
그런데 정수 $x_3$ 는 $x_3=n+t_1+t_2>n$ 과 $-n\le x_3\le n$ 을 동시에 만족시켜야 하지만 $x_3>n$ 과 $x_3\le n$ 은 동시에 만족시킬 수 없다. 따라서 이를 만족시키는 정수 $x_3$ 는 존재하지 않는다. 즉, 정수 $x_3$ 의 부호에 상관없이 $x_1$ 과 $x_2$ 가 음의 정수이면 방정식 $x_1+x_2+x_3=n$ 을 만족시키는 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3)$ 가 존재하지 않는다.
이와 같은 방법으로 생각하면, $x_1$ 과 $x_3$ 가 음의 정수일 때에 방정식 $x_1+x_2+x_3=n$ 을 만족시키는 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3)$ 가 존재하지 않는다는 것을 알 수 있다.
마찬가지로 $x_2$, $x_3$ 가 음의 정수일 때에도 방정식 $x_1+x_2+x_3=n$ 을 만족시키는 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3)$ 가 존재하지 않는다는 것을 알 수 있다.
따라서 $x_1, x_2, x_3$ 중 음의 정수가 2 개 이상인 경우 방정식 $x_1+x_2+x_3=n$ 을 만족시키는 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3)$ 는 존재하지 않는다.

따라서 ( i ), (ii), (iii)에 의하여

$$a_n=\boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}+3\times\sum_{t=1}^{n}\left(\boxed{n+1}-t\right)=(n+1)(2n+1)$$

이고

$$\sum_{n=1}^{5}a_n=\sum_{n=1}^{5}(2n^2+3n+1)=\boxed{160}$$

이다.

따라서 $f(n)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, $g(n)=n+1$, $a=160$ 이므로
$\frac{a}{f(4)+g(4)}=\frac{160}{15+5}=8$ 이다.

20) [정답] ⑤ (출제자 : 17 문혁준)
**[출제의도] 미적분을 이용해 함수의 관계를 파악하여 문제를 해결할 수 있는가?**

[해설]
ㄱ. 조건에서 $f(x)$ 는 모든 양수 $x$ 에 대하여 미분가능하고, $g(x)$ 역시 $f(x)$ 의 정적분 꼴로 구성되어 있으므로 미분가능하다.
따라서 (가) 조건에 있는 식을 미분할 수 있다.
(가) 조건의 식을 미분하면 $2g(x)g'(x)-2f(x)f'(x)=0$ 이고
$g'(x)=f(x)$ 이므로 이는 $2f(x)\{g(x)-f'(x)\}=0$ 이다.
(나) 조건에 의해 모든 양수 $x$ 에 대하여 $f(x)>0$ 이므로
모든 양수 $x$ 에 대하여 $g(x)=f'(x)$ 이다.

ㄴ. (나) 조건에서 모든 양수 $x$에 대하여 $f(x)>0$이므로 모든 양수 $x$에 대하여 $\int_0^x f(t)\,dt>0$이다.

여기에서 $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt+1>1$이다.

ㄱ에서 $g(x)=f'(x)$이므로 모든 양수 $x$에 대하여 $f'(x)>1$이고 따라서 ㄴ은 참이다.

ㄷ. $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt+1$ 역시 실수 전체의 집합에서 연속이다.

여기에서 $g(0)=1$이다.

(가) 조건에 의해 $x>0$일 때 $\{g(x)\}^2-\{f(x)\}^2=1$이므로

$\lim_{x\to0+}[\{g(x)\}^2-\{f(x)\}^2]=1$이다.

$g(x)$와 $f(x)$가 모두 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}[\{g(x)\}^2-\{f(x)\}^2]=1=\{g(0)\}^2-\{f(0)\}^2$이다.

$g(0)=1$이므로 $1=1-\{f(0)\}^2$이고 여기에서 $f(0)=0$이다.

$x=0$에서 $x=n$까지의 곡선 $y=g(x)$의 길이를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\int_0^n\sqrt{1+\{g'(x)\}^2}\,dx&=\int_0^n\sqrt{1+\{f(x)\}^2}\,dx\\&=\int_0^n|g(x)|\,dx\\&=\int_0^n g(x)\,dx\ \ (\because g(x)\geq 0)\\&=\int_0^n f'(x)\,dx\ \ (\because g(x)=f'(x))\\&=f(n)-f(0)\end{aligned}$$

$f(0)=0$이므로 $\int_0^n\sqrt{1+\{g'(x)\}^2}\,dx=f(n)$이다.

따라서 $x=0$에서 $x=n$까지의 곡선 $y=g(x)$의 길이는 $f(n)$이다.

[별해]

ㄴ. (가) 조건에서 모든 양수 $x$에 대하여 $\{g(x)\}^2=1+\{f(x)\}^2$이고 (나) 조건에서 모든 양수 $x$에 대하여 $f(x)>0$이다.

따라서 모든 양수 $x$에 대하여 $\{g(x)\}^2>1$이고, $g(x)$는 연속함수이므로 모든 양수 $x$에 대하여 $g(x)>1$ 또는 $g(x)<-1$이다.

$g(0)=1$이고 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}g(x)=g(0)=1$이다.

따라서 모든 양수 $x$에 대하여 $g(x)<-1$일 수는 없으므로 $g(x)>1$이다.

21) [정답] ① (출제자 : 17 김정빈)

**[출제의도] 적분과 넓이의 관계를 알고, 이를 함수의 개형을 파악하는데 적용할 수 있는가?**

[해설]

우선 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 파악해보자.

$f(6+x)+f(6-x)=0$이므로 $f(6)=0$이고, 방정식 $f(x)=0$이 오직 하나의 실근을 갖기 때문에, 함수 $f(x)$의 그래프는 $x$축과 $x=6$에서만 만난다는 것을 알 수 있다. 따라서 함수 $f(x)$는

(1) $x<6$에서 $f(x)<0$이고 $x>6$에서 $f(x)>0$

또는

(2) $x<6$에서 $f(x)>0$이고 $x>6$에서 $f(x)<0$

이다.

(1)의 경우, $\int_0^6 f(t)\,dt<0$이다. 그러나 $\int_3^9|f(t)|\,dt\geq0$이므로 $\int_0^6 f(t)\,dt=\int_3^9|f(t)|\,dt$에 모순이다. 따라서 (2)가 성립하고 $x<6$에서 $f(x)>0$, $x>6$에서 $f(x)<0$임을 알 수 있다.

$\int_0^6 f(t)\,dt=\int_3^9|f(t)|\,dt$를 정리하면

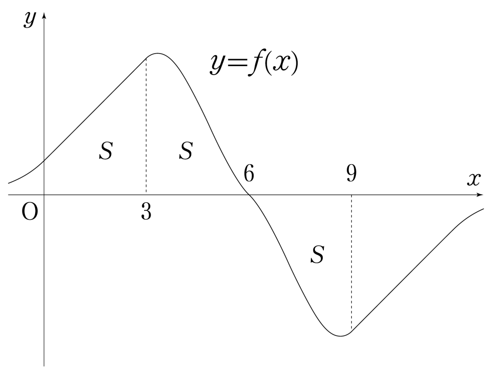
$\int_3^9|f(t)|\,dt=\int_3^6 f(t)\,dt-\int_6^9 f(t)\,dt$이다.

한편 $\int_6^9 f(t)\,dt=-\int_3^6 f(t)\,dt$이므로

$\int_3^9|f(t)|\,dt=2\int_3^6 f(t)\,dt$이다.

따라서 $\int_0^6 f(t)\,dt=2\int_3^6 f(t)\,dt$이므로, $\int_0^3 f(t)\,dt=\int_3^6 f(t)\,dt$이다.

$\int_0^3 f(t)\,dt=S$라 하면, 함수 $f(x)$의 그래프를 다음과 같이 그릴 수 있다.

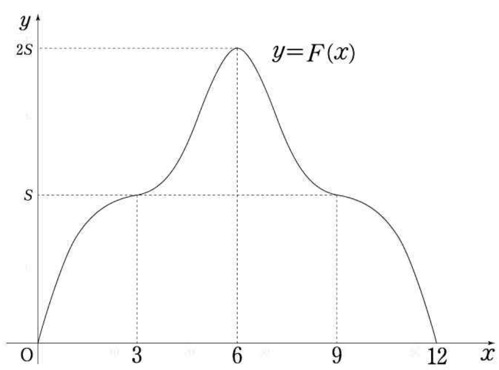



$F(6+x)=\int_0^{6+x}f(t)\,dt$이고 $F(6-x)=\int_0^{6-x}f(t)\,dt$이므로

$$\begin{aligned}F(6+x)-F(6-x)&=\int_{6-x}^{6+x}f(t)\,dt=\int_{6-x}^{6}f(t)\,dt+\int_6^{6+x}f(t)\,dt\\&=\int_{6-x}^{6}f(t)\,dt-\int_{6-x}^{6}f(t)\,dt=0\end{aligned}$$

에서 $F(6+x)=F(6-x)$이다.

이에 따라 함수 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.




$\int_0^3 F(t)\,dt=A$, $\int_3^6 F(t)\,dt=B$라 하자.

먼저 (가) 조건을 풀면 $\int_0^3 F(t)\,dt+\int_3^9 tf(t)\,dt=0$에서

$$\begin{aligned}\int_3^9 tf(t)\,dt&=[tF(t)]_3^9-\int_3^9 F(t)\,dt=9F(9)-3F(3)-2\int_3^6 F(t)\,dt\\&=9S-3S-2B=-\int_0^3 F(t)\,dt=-A\text{이다.}\end{aligned}$$

정리하면 $6S-2B=-A$에서 $-A+2B=6S$이다.

(나) 조건을 풀면 $\int_0^6 F(t)\,dt=3\int_0^6 f(t)\,dt$에서

$\int_0^6 F(t)\,dt=A+B$이고 $3\int_0^6 f(t)\,dt=3\times2S$이므로

$A+B=6S$이다.

(가) 조건과 (나) 조건에서 얻은 정보를 정리하면

$-A+2B=6S,\ A+B=6S$

이다. 연립해서 정리하면 $A=2S,\ B=4S$ 이다.

따라서 $\int_0^3 F(t)\,dt=2S,\ \int_3^6 F(t)\,dt=4S$ 이다.

$\int_0^9 F(t)\,dt=A+2B=2S+2\times 4S=10S,\ \int_0^9 f(t)\,dt=S$ 이므로

$\int_0^9 F(t)\,dt=10\int_0^9 f(t)\,dt$ 이다. 따라서 $k=10$ 이다.

22) [정답] 72 (출제자 : 17 김정빈)

**[출제의도] 간단한 순열의 계산을 할 수 있는가?**

[해설]

${}_9\mathrm{P}_2=9\times 8=72$

23) [정답] 4 (출제자 : 18 이현준)

**[출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 알고 이를 활용할 수 있는가?**

[해설]

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 이고 양변을 $\cos^2\theta$ 로 나누면

$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$ 이다. $(\cos\theta\neq 0)$

문제에서 $\tan\theta=\sqrt{15}$ 이므로 $\sec^2\theta=16$ 이고

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sec\theta>0$ 이다.

따라서 $\sec\theta=4$ 이다.

24) [정답] 15 (출제자 : 17 문혁준)

**[출제의도] 이산확률분포표의 $\mathrm{E}(X)$ 를 계산할 수 있는가?**

[해설]

$a+b+\frac{1}{2}=1$ 에서 $a+b=\frac{1}{2}$ 이다.

$\mathrm{E}(X)=0\times a+1\times b+2\times\frac{1}{2}=1+b=\frac{7}{6}$ 이므로 $b=\frac{1}{6}$ 이다.

$a+b=\frac{1}{2}$ 이고 $b=\frac{1}{6}$ 이므로 $a=\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 $a-b=\frac{1}{6}$ 이고, $90(a-b)=15$ 이다.

25) [정답] 20 (출제자 : 18 김윤태)

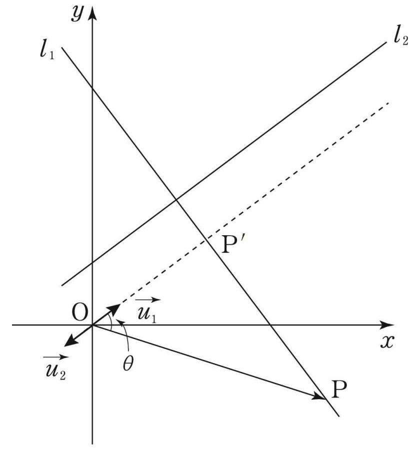
**[출제의도] 벡터를 이용하여 평면에서의 직선의 방정식을 해석할 수 있는가?**

[해설]

직선 $l_1:\frac{x-8}{3}=\frac{6-y}{4}$ 의 방향벡터는 $(3,-4)$ 이고, 이와 수직인 벡터는 $(4a,3a)$ ($a$는 0이 아닌 실수) 꼴로 나타난다.

즉, $\vec{u}=(4a,3a)$ 이다.

$a$가 양수인지 음수인지에 따라 $l_2$ 의 방향벡터 $\vec{u}$ 는 아래 그림과 같이 두 가지로 나타난다.




(이때, 점 P′은 점 O에서 직선 $l_1$에 내린 수선의 발이다.)

i) $a>0$ 일 때, $l_2$ 의 방향벡터는 $\vec{u_1}$ 이다. 이때 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 와 $\vec{u_1}$ 이 이루는 각의 크기를 $\theta$ 라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\frac{\vec{u_1}}{|\vec{u_1}|}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\times 1\times\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}|$

이고, $|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}|$ 는 원점 O와 직선 $l_1$ 사이의 거리이므로 (…[보충] 참고)

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=10$ 이다.

ii) $a<0$ 일 때, $l_2$ 의 방향벡터는 $\vec{u_2}$ 이다. 이때 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 와 $\vec{u_2}$ 가 이루는 각의 크기는 $\pi-\theta$ 이며

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\frac{\vec{u_2}}{|\vec{u_2}|}&=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\times 1\times\cos(\pi-\theta)\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\times(-\cos\theta)\\&=-|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}|\end{aligned}$$

이고, $|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}|$ 는 원점 O와 직선 $l_1$ 사이의 거리이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=-10$ 이다.

$\therefore M=10,\ m=-10$ 이므로 $M-m=20$ 이다.

[별해]

직선 $l_1:\frac{x-8}{3}=\frac{6-y}{4}=t$ 라 할 때, 직선 $l_1$ 위의 점 P를 매개변수 $t$ 에 대하여 $\mathrm{P}(3t+8,-4t+6)$ 이라 할 수 있다.

이때, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(3t+8,-4t+6)$ 이다.

$|\vec{u}|=\sqrt{(4a)^2+(3a)^2}=5|a|$ 이므로 2가지 경우로 나누어 생각하면

i) $a>0$ 일 때

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}&=(3t+8,-4t+6)\cdot\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)\\&=\frac{12}{5}t+\frac{32}{5}-\frac{12}{5}t+\frac{18}{5}\\&=10\end{aligned}$$

ii) $a<0$ 일 때

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}&=(3t+8,-4t+6)\cdot\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)\\&=-\frac{12}{5}t-\frac{32}{5}+\frac{12}{5}t-\frac{18}{5}\\&=-10\end{aligned}$$

이다.

$\therefore M=10,\ m=-10$ 이므로 $M-m=20$ 이다.

[보충]
원점과 직선 $l_1$ 사이의 거리를 구하는 방법

① 점 $(x_1,\ y_1)$와 직선 $l : ax+by+c=0$ 사이의 거리 $d$를 구하는 공식 $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 를 사용한다.

직선 $l_1$ 의 방정식을 공식에 필요한 꼴로 정리하면
$l_1 : 4x+3y-50=0$ 이다. 이제 원점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 직선 $l_1$ 사이의 거리를 구하면
$\dfrac{|4\times0+3\times0-50|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{|-50|}{\sqrt{25}}=\dfrac{50}{5}=10$
이다.

∴ 원점 O 와 직선 $l_1$ 사이의 거리는 10 이다.

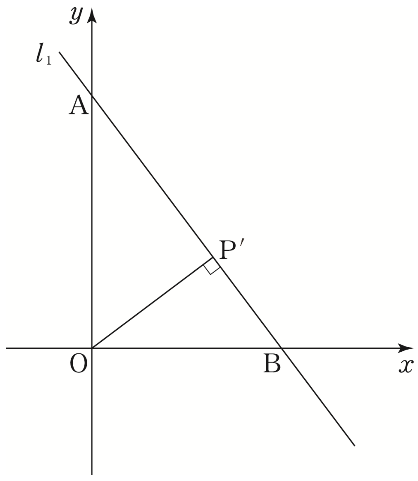
② 매개변수 $t$를 이용하여 점과 직선 사이의 거리를 구하는 방법

직선 $l_1 : \dfrac{x-8}{3}=\dfrac{6-y}{4}$ 위를 움직이는 점 P 를 매개변수 $t$를 이용해 표현하면 $\mathrm{P}(3t+8,\ -4t+6)$이다.

이때, 선분 OP 의 길이를 $t$로 표현하면
$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(3t+8-0)^2+(-4t+6-0)^2}$
$=\sqrt{9t^2+48t+64+16t^2-48t+36}$
$=\sqrt{25t^2+100}$
이다.
$\overline{\mathrm{OP}}$ 는 $t=0$일 때, 최솟값 10 을 갖는다.

∴ 원점 O 와 직선 $l_1$ 사이의 거리는 10 이다.

③ 삼각형의 넓이를 이용하여 구하는 방법
직선 $l_1$ 의 $x$절편과 $y$절편을 각각 점 B , 점 A 라 하자.




$\overline{\mathrm{OA}}=\dfrac{50}{3}$ , $\overline{\mathrm{OB}}=\dfrac{50}{4}$ 이고, 피타고라스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(\dfrac{50}{3}\right)^2+\left(\dfrac{50}{4}\right)^2}=\dfrac{125}{6}$ 이다.

이때 삼각형의 넓이를 이용해 등식을 세우면
$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{OP'}}$
$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{50}{3}\times\dfrac{50}{4}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{125}{6}\times\overline{\mathrm{OP'}}$ 이므로
$\overline{\mathrm{OP'}}=10$ 이다.
∴ 원점 O 와 직선 $l_1$ 사이의 거리는 10 이다.

④ 직선의 방정식을 이용하여 구하는 방법

직선 OP′ 의 방정식을 구하면 $3x-4y=0$ 이다.
직선 $l_1$ 의 방정식과 직선 OP′ 의 방정식을 연립한다.

$$\begin{cases}4x+3y=50\\3x-4y=0\end{cases}$$

위 연립방정식을 풀면 $x=8$ , $y=6$ 이다.
즉, 직선 $l_1$과 직선 OP′ 의 교점 P′ 의 좌표가 $(8,\ 6)$임을 알 수 있고
선분 OP′ 의 길이를 구하면
$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(8-0)^2+(6-0)^2}$
$=\sqrt{100}$
$=10$ 이다.

∴ 원점 O 와 직선 $l_1$ 사이의 거리는 10 이다.

26) [정답] 7 (출제자 : 17 김정빈)
**[출제의도] 정규분포곡선의 성질을 이해하고 이를 활용할 수 있는가?**

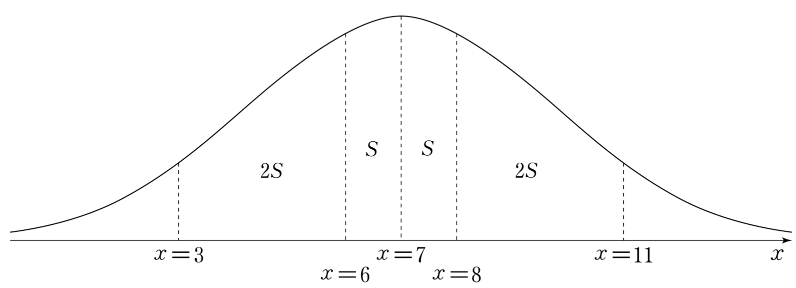
[해설]
$p_1=p_3$에서 $\mathrm{P}(a-3\le X\le a)=\mathrm{P}(a+2\le X\le a+5)$이다.
확률변수 $X$는 평균이 7 인 정규분포를 따르므로
확률변수 $X$ 의 확률밀도함수의 그래프는 직선 $x=7$에 대하여 대칭이다.
따라서 $a+1=7$이고, $a=6$이다.
$p_1=p_2=p_3$를 정리하면
$\mathrm{P}(3\le X\le 6)=\mathrm{P}(6\le X\le 8)=\mathrm{P}(8\le X\le 13)$
이다.

$\mathrm{P}(6\le X\le 8)=\mathrm{P}(6\le X\le 7)+\mathrm{P}(7\le X\le 8)$이므로
$\mathrm{P}(6\le X\le 7)=S$라 하면 다음이 성립한다.

| 구간 | 값 |
|---|---|
| $\mathrm{P}(3\le X\le 6)$ | $2S$ |
| $\mathrm{P}(6\le X\le 7)$ | $S$ |
| $\mathrm{P}(7\le X\le 8)$ | $S$ |
| $\mathrm{P}(8\le X\le 11)$ | $2S$ |

$\mathrm{P}(6\le X\le 11)=\mathrm{P}(6\le X\le 7)+\mathrm{P}(7\le X\le 8)+\mathrm{P}(8\le X\le 11)$
$=S+S+2S=4S$이고
$\mathrm{P}(3\le X\le 7)=\mathrm{P}(3\le X\le 6)+\mathrm{P}(6\le X\le 7)$
$=2S+S=3S$이다.
따라서 $4S=\dfrac{4}{3}\times3S$이므로 $k=\dfrac{4}{3}$이다.
$\therefore\ p+q=3+4=7$

[보충]
확률밀도함수의 그래프 아래의 넓이를 나타내면 다음과 같다.



27) [정답] 10 (출제자 : 18 안동우)

**[출제의도] 포물선의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?**

[해설]

포물선 $C_1 : y^2 = 4x + 4 = 4(x+1)$ 이므로

포물선 $C_1$ 의 초점은 $(0,\ 0)$ 이다.

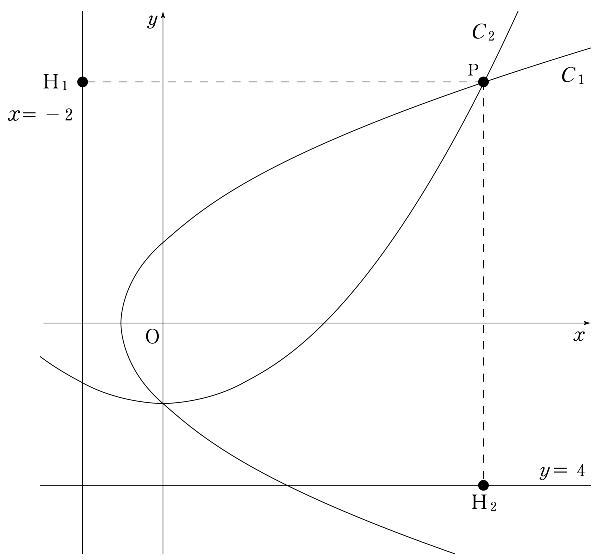
$C_1$ 이 $y$ 축과 만나는 두 점은 $(0,\ \pm 2)$ 이다.

포물선 $C_2$ 의 꼭짓점을 $(0,\ -2)$ 라 하자. (…[보충] 참고)

$C_2$ 는 초점이 원점이고 꼭짓점이 $(0,\ -2)$ 인 포물선이므로

$C_2 : x^2 = 8(y+2)$ 이다.

두 포물선 $C_1$, $C_2$ 를 좌표평면에 그리면 아래와 같다.




두 포물선의 교점 중 $y$ 축 위에 있지 않은 점을 P 라 하자.

점 P 에서 직선 $x = -2$ 에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}_1$,

직선 $y = -4$ 에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}_2$ 라 하자.

점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$ $(a > 0,\ b > 0)$ 라 할 때, $\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ 이다.

포물선의 정의에 의해서 두 포물선의 초점은 원점이고

포물선 $C_1$ 의 준선은 $x = -2$ 이므로 $\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{PH}_1} = a + 2$ 이고

포물선 $C_2$ 의 준선은 $y = -4$ 이므로 $\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{PH}_2} = b + 4$ 이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{a^2 + b^2} = a + 2 = b + 4$ 이다.

$b = a - 2$ 이므로

$\sqrt{2a^2 - 4a + 4} = a + 2$

$\Rightarrow 2a^2 - 4a + 4 = a^2 + 4a + 4$

$\Rightarrow a^2 - 8a = 0$ 이고

$a > 0$ 이므로 $a = 8$ 이고, $b = 6$ 이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{a^2 + b^2} = 10$ 이다.

[보충]

$C_2$ 의 꼭짓점이 $(0,\ 2)$ 인 경우는 $C_2$ 의 꼭짓점이 $(0,\ -2)$ 인 경우의 그래프를 $x$ 축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 선분 OP 의 길이는 같다.

28) [정답] 46 (출제자 : 18 이현준)

**[출제의도] 중복조합을 이용하여 문제 상황에 맞는 경우의 수를 구할 수 있는가?**

[해설]

(가) 규칙에 따라 바둑돌의 개수의 합은 일정하므로, 한 가지 색깔의 바둑돌 개수를 정하면 다른 색깔의 바둑돌 개수도 정해진다. 검은 바둑돌의 개수를 먼저 정한 후 가능한 경우의 수를 구해보자.

( i ) 검은 바둑돌의 개수가 2 인 경우

∨ ● ∨ ● ∨

첫 번째 ∨ 표시에 오는 흰 바둑돌의 개수를 $a$, 두 번째 ∨ 표시에 오는 흰 바둑돌의 개수를 $b$, 세 번째 ∨ 표시에 오는 흰 바둑돌의 개수를 $c$ 라 하면 $a+b+c=6$ 이다. (∵ 규칙 (가))

$a \geq 0$, $b \geq 1$, $c \geq 0$ 이어야 하므로 (∵ 규칙 (나))

$b = b' + 1$ 로 두면 $a + b' + c = 5$ 이다.

$a \geq 0$, $b' \geq 0$, $c \geq 0$ 이므로

구하는 경우의 수는 서로 다른 3 개에서 중복을 허락하여 5 개를 택하는 중복조합의 수인 ${}_3\mathrm{H}_5$ 와 같다.

따라서 가능한 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_5 = {}_{3+5-1}\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_2 = \dfrac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$ 이다.

(ii) 검은 바둑돌의 개수가 3 인 경우

∨ ● ∨ ● ∨ ● ∨

첫 번째 ∨ 표시에 오는 흰 바둑돌의 개수를 $a$, 두 번째 ∨ 표시에 오는 흰 바둑돌의 개수를 $b$, 세 번째 ∨ 표시에 오는 흰 바둑돌의 개수를 $c$, 네 번째 ∨ 표시에 오는 흰 바둑돌의 개수를 $d$ 라 하면

$a+b+c+d=5$ 이다. (∵ 규칙 (가))

$a \geq 0$, $b \geq 1$, $c \geq 1$, $d \geq 0$ 이어야 하므로 (∵ 규칙 (나))

$b = b'+1$, $c = c'+1$ 로 두면 $a + b' + c' + d = 3$ 이다.

$a \geq 0$, $b' \geq 0$, $c \geq 0$ 이므로

구하는 경우의 수는 서로 다른 4 개에서 중복을 허락하여 3 개를 택하는 중복조합의 수인 ${}_4\mathrm{H}_3$ 과 같다.

따라서 가능한 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_3 = {}_{4+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_6\mathrm{C}_3 = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ 이다.

(iii) 검은 바둑돌의 개수가 4 인 경우

∨ ● ∨ ● ∨ ● ∨ ● ∨

첫 번째 ∨ 표시에 오는 흰 바둑돌의 개수를 $a$, 두 번째 ∨ 표시에 오는 흰 바둑돌의 개수를 $b$, 세 번째 ∨ 표시에 오는 흰 바둑돌의 개수를 $c$, 네 번째 ∨ 표시에 오는 흰 바둑돌의 개수를 $d$, 다섯 번째 ∨ 표시에 오는 흰 바둑돌의 개수를 $e$ 라 하면 $a+b+c+d+e=4$ 이다. (∵ 규칙 (가))

$a \geq 0$, $b \geq 1$, $c \geq 1$, $d \geq 1$, $e \geq 0$ 이어야 하므로 (∵ 규칙 (나))

$b = b'+1$, $c = c'+1$, $d = d'+1$ 로 두면

$a + b' + c' + d' + e = 1$ 이다.

$a \geq 0$, $b' \geq 0$, $c \geq 0$ 이므로

구하는 경우의 수는 서로 다른 5 개에서 중복을 허락하여 1 개를 택하는 중복조합의 수인 ${}_5\mathrm{H}_1$ 과 같다.

따라서 가능한 경우의 수는 ${}_5\mathrm{H}_1 = {}_{5+1-1}\mathrm{C}_1 = {}_5\mathrm{C}_1 = 5$ 이다.

(iv) 검은 바둑돌의 개수가 5 이상인 경우
검은 바둑돌의 개수가 5 인 경우 (나) 규칙에 의하여 검은 바둑돌은 서로 이웃할 수 없으므로, 흰 바둑돌이 적어도 4 개 필요하다.
하지만 (가) 규칙에 의하면 검은 바둑돌과 흰 바둑돌 개수의 합이 8 이어야 하므로 두 규칙을 동시에 만족시키도록 나열할 수 없다.
검은 바둑돌의 개수가 5 보다 클 때도 마찬가지의 이유로 두 규칙을 동시에 만족시키도록 바둑돌을 나열할 수 없다. 따라서 가능한 경우의 수는 0 이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의하여 가능한 모든 경우의 수는
$21+20+5=46$ 이다.

[별해]
(나) 규칙을 고려하여 검은 바둑돌의 개수를 정하면 (가) 규칙에 의하여 흰 바둑돌의 개수도 정해지므로, 흰 바둑돌의 개수를 기준으로 가능한 경우의 수를 구한다.

(ⅰ) 흰 바둑돌의 개수가 6 인 경우

∨ ○ ∨ ○ ∨ ○ ∨ ○ ∨ ○ ∨ ○ ∨

∨ 표시가 되어 있는 곳 중 두 곳을 선택하여 검은 바둑돌 1 개씩을 넣으면 된다. 구하는 경우의 수는 서로 다른 7 개 중 2 개를 선택하는 조합의 수인 ${}_7C_2$ 와 같으므로 가능한 경우의 수는 ${}_7C_2=\dfrac{7\times6}{2\times1}=21$ 이다.

(ⅱ) 흰 바둑돌의 개수가 5 인 경우

∨ ○ ∨ ○ ∨ ○ ∨ ○ ∨ ○ ∨

∨ 표시가 되어 있는 곳 중 세 곳을 선택하여 검은 바둑돌 1 개씩을 넣으면 된다. 구하는 경우의 수는 서로 다른 6 개 중 3 개를 선택하는 조합의 수인 ${}_6C_3$ 과 같으므로 가능한 경우의 수는 ${}_6C_3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$ 이다.

(ⅲ) 흰 바둑돌의 개수가 4 인 경우

∨ ○ ∨ ○ ∨ ○ ∨ ○ ∨

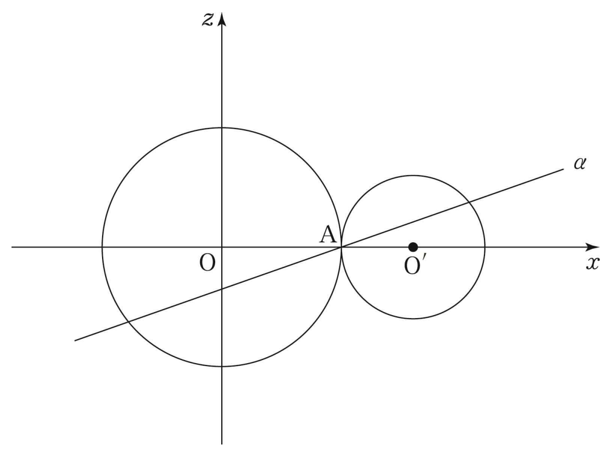
∨ 표시가 되어 있는 곳 중 네 곳을 선택하여 검은 바둑돌 1 개씩을 넣으면 된다. 구하는 경우의 수는 서로 다른 5 개 중 4 개를 선택하는 조합의 수인 ${}_5C_4$ 와 같으므로 가능한 경우의 수는 ${}_5C_4=5$ 이다.

(iv) 흰 바둑돌의 개수가 3 이하인 경우
흰 바둑돌의 개수가 3 인 경우 (가) 규칙에 의하여 검은 바둑돌을 5 개 나열해야 한다. 그런데 (나) 규칙에 의하면 검은 바둑돌은 서로 이웃하지 않아야 하므로 흰 바둑돌이 적어도 4 개 필요하다. 즉, 두 규칙을 동시에 만족시키도록 나열할 수 없게 된다.
흰 바둑돌의 개수가 3 미만일 때도 마찬가지 이유로 두 규칙을 동시에 만족시키도록 바둑돌을 나열할 수 없다. 따라서 가능한 경우의 수는 0 이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의하여 가능한 모든 경우의 수는
$21+20+5=46$ 이다.

29) [정답] 54 (출제자 : 18 김종해)
**[출제의도] 주어진 상황에서 벡터를 분해하여 내적의 최댓값과 최솟값을 계산할 수 있는가?**

[해설]
구 $S_2$ 의 중심을 $O'$ 이라 하자.
두 구 $S_1$, $S_2$ 의 중심이 $x$ 축 위에 있고, 평면 $\alpha$ 가 $y$ 축과 평행하므로 문제 상황을 다음과 같이 그릴 수 있다.

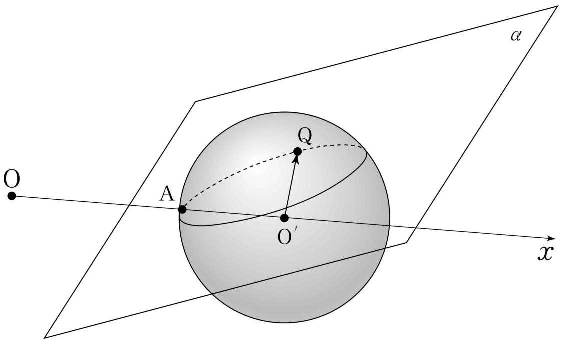



$3\overrightarrow{AP}+5\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{OP}$ 에서 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ 를
각각 $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{AO'}+\overrightarrow{O'Q}$ 로 분해하여 생각해보자.
$3\overrightarrow{AP}+5\overrightarrow{AQ}=3(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})+5(\overrightarrow{AO'}+\overrightarrow{O'Q})$ 에서
두 벡터 $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AO'}$ 는 크기가 각각 5, 3 이고
방향이 서로 반대이므로
$3\overrightarrow{AO}+5\overrightarrow{AO'}=0$ 이다.
즉, $3\overrightarrow{AP}+5\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{OP}+5\overrightarrow{O'Q}=k\overrightarrow{OP}$ 에서
$(k-3)\overrightarrow{OP}=5\overrightarrow{O'Q}$ 이므로
두 벡터 $\overrightarrow{OP}$ 와 $\overrightarrow{O'Q}$ 가 서로 평행함을
알 수 있다.

또한, 두 점 P, Q 는 각각 구 $S_1$, $S_2$ 위의 점이므로 $|\overrightarrow{OP}|=5$, $|\overrightarrow{O'Q}|=3$ 이고, 따라서 $\overrightarrow{OP}=\pm\dfrac{5}{3}\overrightarrow{O'Q}$ 이다.

ⅰ) $\overrightarrow{OP}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{O'Q}$ 일 때
$(k-3)\overrightarrow{OP}=5\overrightarrow{O'Q}$ 에서 $\dfrac{k-3}{3}\overrightarrow{OP}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{O'Q}=\overrightarrow{OP}$ 이므로
$\dfrac{k-3}{3}=1$, $k=6$ 이다.
ⅱ) $\overrightarrow{OP}=-\dfrac{5}{3}\overrightarrow{O'Q}$ 일 때
$(k-3)\overrightarrow{OP}=5\overrightarrow{O'Q}$ 에서 $\dfrac{k-3}{3}\overrightarrow{OP}=-\dfrac{5}{3}\overrightarrow{O'Q}=-\overrightarrow{OP}$ 이므로
$\dfrac{k-3}{3}=-1$, $k=0$ 이다.
$k>0$ 이므로 이는 문제의 조건을 만족시키지 못한다.
ⅰ), ⅱ)에 의해 $k=6$ 이다.

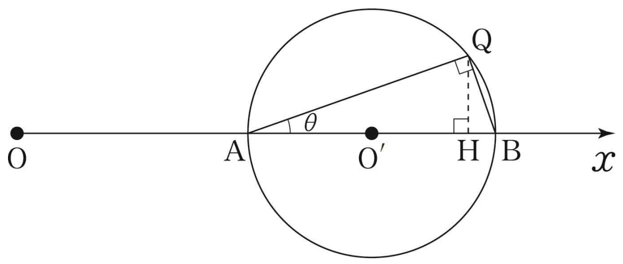
$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 의 값을 구하기 위해 두 벡터를 구의 중심에 대해 분해해보자.
$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{OQ}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'Q})$ 에서
$\overrightarrow{OP}=\frac{5}{3}\overrightarrow{O'Q}$ 이므로
$(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'Q})=\left(-\frac{5}{3}\overrightarrow{O'Q}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'Q})$
이다.
두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OO'}$ 는 서로 방향이 같고 크기가 각각 5, 8 이므로
$\left(-\frac{5}{3}\overrightarrow{O'Q}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'Q})$
$=\left(-\frac{5}{3}\overrightarrow{O'Q}+\frac{5}{8}\overrightarrow{OO'}\right)\cdot(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'Q})$
$=-15+40-\frac{25}{24}(\overrightarrow{OO'}\cdot\overrightarrow{O'Q})$ 이다.
즉, $\overrightarrow{OO'}\cdot\overrightarrow{O'Q}$ 의 값에 따라 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 의 최댓값과 최솟값이 결정된다.




[그림]

i ) 최댓값
$\overrightarrow{OO'}\cdot\overrightarrow{O'Q}$ 의 값이 최소일 때 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 의 값이 최대가 된다.
이는 [그림]에서 점 Q 가 점 A 에 위치할 때이다.
이때 $\overrightarrow{OO'}\cdot\overrightarrow{O'Q}=-24$ 이므로, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 의 최댓값은 50 이다.

ii) 최솟값
$\overrightarrow{OO'}\cdot\overrightarrow{O'Q}$ 의 값이 최대일 때 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 의 값이 최소가 된다.
이는 [그림]에서 점 Q 가 점 A 와 가장 멀리 떨어져 있을 때이다.




평면 $\alpha$ 가 $x$ 축과 이루는 각의 크기를 $\theta$ 라 하고, $x$ 축과 구 $S_2$ 가 만나는 점 중 점 A 가 아닌 점을 B 라 하고, 점 Q 에서 $x$ 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면,
$\overrightarrow{OO'}\cdot\overrightarrow{O'Q}=|\overrightarrow{OO'}||\overrightarrow{O'H}|$ 이다.
$|\overrightarrow{O'H}|$ 의 값을 구하기 위해 삼각형 ABQ 를 살펴보자.

점과 평면 사이의 거리 공식에 의해 점 O′ 와 평면 $\alpha$ 사이의 거리 $d$ 는
$d=\frac{|8-2\sqrt{2}\times 5|}{\sqrt{1^2+0^2+(-2\sqrt{2})^2}}=1$ 이다. 따라서 $\overline{BQ}=2d=2$ 이다.
$\overline{AB}=6$ 이므로, 피타고라스 정리에 의해 $\overline{AQ}=4\sqrt{2}$ 이다.
$\cos\theta=\frac{\overline{AQ}}{\overline{AB}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이므로
$|\overrightarrow{O'H}|=|\overrightarrow{AQ}|\cos\theta-|\overrightarrow{AO'}|=\frac{7}{3}$ 이다.
즉, $|\overrightarrow{OO'}||\overrightarrow{O'H}|=\frac{56}{3}$ 이고, 따라서 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 의 최솟값은 $\frac{50}{9}$ 이다.
$k=6$, $M=50$, $m=\frac{50}{9}$ 이므로 $k\times\frac{M}{m}=54$ 이다.

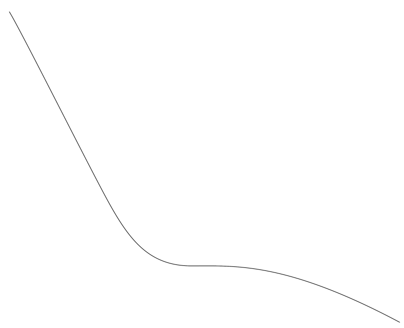
30) [정답] 5 (출제자 : 18 안동우)
**[출제의도] 함수의 미분가능성을 파악하고 함수의 극한 및 이계도함수의 성질을 이용하여 함수의 그래프를 추론할 수 있는가?**

[해설]
임의의 두 실수 $x_1$, $x_2$ $(x_1<x_2)$ 에 대하여
$f(x_2)<f(x_1)$ 이므로 $f'(x)<0$ 이다.
$f(x)=\ln\{(x-a)^2+b\}-x$ 이므로
$f'(x)=\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b}-1=\frac{2(x-a)-\{(x-a)^2+b\}}{(x-a)^2+b}$
$=\frac{-(x-a-1)^2+1-b}{(x-a)^2+b}\le 0$ 이다.
이때, 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 정의되어 있으므로
로그의 진수 조건에 의해 $(x-a)^2+b>0$ 이다.
따라서 $-(x-a-1)^2+1-b\le 0$ 이므로 $1\le b$ 이다.

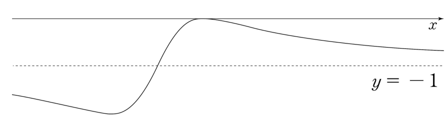
$f''(x)=\frac{-2(x-a)^2+2b}{\{(x-a)^2+b\}^2}$ 이므로
함수 $f(x)$ 의 그래프는 $x=a-\sqrt{b}$, $x=a+\sqrt{b}$ 에서 변곡점을 갖는다.
또한 $f'(x)$ 는 $x=a-\sqrt{b}$ 일 때 극솟값을 갖고
$x=a+\sqrt{b}$ 일 때 극댓값을 갖는다.
이를 통해 함수 $f(x)$ 가 두 구간 $(-\infty, a-\sqrt{b})$, $(a+\sqrt{b}, \infty)$ 에서 위로 볼록이고 구간 $(a-\sqrt{b}, a+\sqrt{b})$ 에서 아래로 볼록임을 알 수 있다.

$f'(x)=\frac{-(x-a-1)^2+1-b}{(x-a)^2+b}$ 이므로
$\lim_{x\to INF}f'(x)=\lim_{x\to -INF}f'(x)=-1$ 이다.
따라서 함수 $f(x)$ 의 기울기는 $x$ 가 양의 무한대나 음의 무한대로 갈 때 $-1$ 로 수렴한다.

따라서 두 함수 $f(x)$, $f'(x)$ 의 그래프는 아래와 같다.



$f(x)$



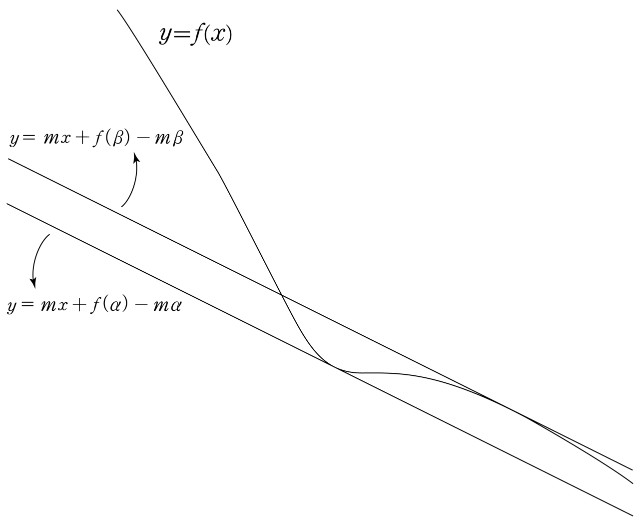

$f'(x)$

함수 $f'(x)$ 는 $x=a+\sqrt{b}$ 에서 최댓값을 갖고
$x=a-\sqrt{b}$ 에서 최솟값을 갖는다.

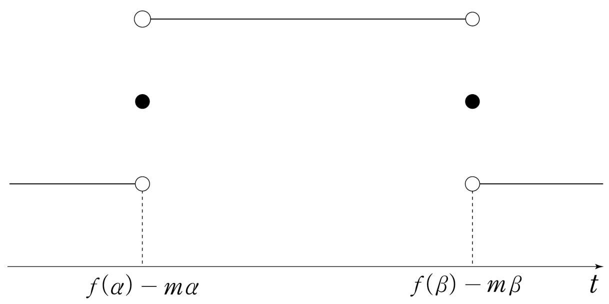
따라서 $f'(x)=k$를 만족시키는 근의 개수는
$f'(a-\sqrt{b})<k<-1$, $-1<k<f'(a+\sqrt{b})$일 때 2이고
$k=f'(a\pm\sqrt{b})$, $k=-1$일 때 1이고
그 이외의 경우에는 0이다.

i) $m \geq f'(a+\sqrt{b})$인 경우
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx+t$의 교점은 $t$의 값에 상관없이 항상 하나이므로 방정식 $g(t)=c$가 실근이 존재하도록 하는 서로 다른 실수 $c$의 개수는 1이다.
따라서 (나) 조건을 만족시키지 못한다.

ii) $-1<m<f'(a+\sqrt{b})$인 경우
$m=f'(x)$을 만족시키는 두 실수 $x$를 각각 $\alpha$, $\beta$ $(\alpha<\beta)$라 하자.
함수 $f(x)$와 직선 $y=mx+t$가
$x=\alpha$에서 접할 때, $t=f(\alpha)-m\alpha$이고
$x=\beta$에서 접할 때, $t=f(\beta)-m\beta$이다.

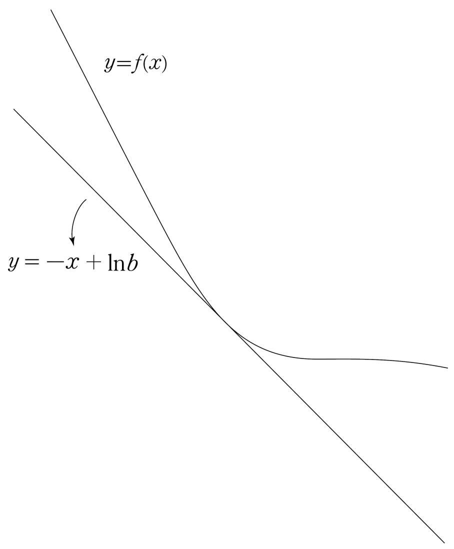



그래프를 통해 다음 다섯 가지 사실을 알 수 있다.
① $t<f(\alpha)-m\alpha$일 때, $g(t)=1$이다.
② $t=f(\alpha)-m\alpha$일 때, $g(t)=2$이다.
③ $f(\alpha)-m\alpha<t<f(\beta)-m\beta$일 때, $g(t)=3$이다.
④ $t=f(\beta)-m\beta$일 때, $g(t)=2$이다.
⑤ $t>f(\beta)-m\beta$일 때, $g(t)=1$이다

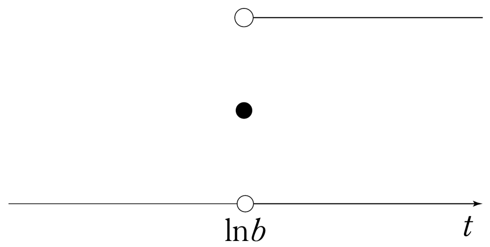



따라서 함수 $g(t)$의 그래프는 위와 같고 (나) 조건을 만족시킨다.

iii) $m=-1$인 경우
$f'(x)$의 점근선은 $y=-1$이므로
$f'(x)=-1$을 만족시키는 실수 $x$의 개수는 1이다.
이때 $f'(x)=\dfrac{2(x-a)}{(x-a)^2+b}-1$이므로
$$\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b}-1=-1$$
$$\Rightarrow \frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b}=0$$
$$\Rightarrow 2(x-a)=0$$
따라서 $x=a$일 때 $f'(x)=-1$이다.
함수 $f(x)$와 직선 $y=-x+t$가 $x=a$에서 접할 때
$f(a)=-a+t$이므로
$t=f(a)+a=\ln b-a+a=\ln b$이다.
따라서 $t=\ln b$이다.

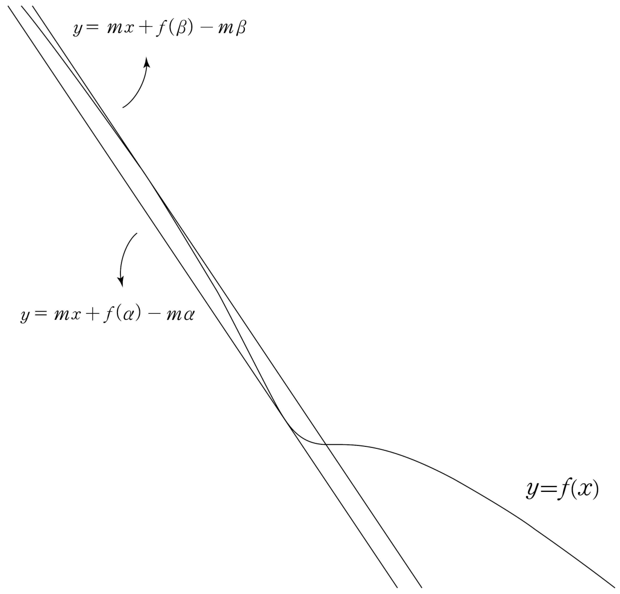



그래프를 통해 다음 세 가지 사실을 알 수 있다.
① $t<\ln b$일 때, $g(t)=0$이다.
② $t=\ln b$일 때, $g(t)=1$이다.
③ $t>\ln b$일 때, $g(t)=2$이다.

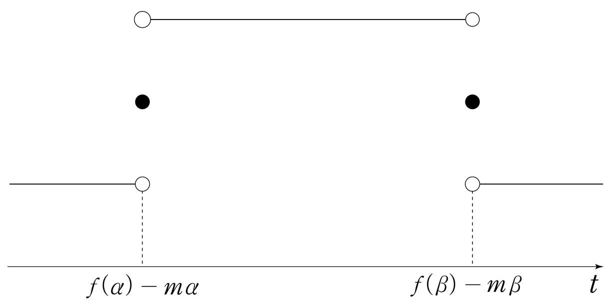



따라서 함수 $g(t)$의 그래프는 위와 같고 (나) 조건을 만족시킨다.

iv) $f'(a-\sqrt{b})<m<-1$
$m=f'(x)$을 만족시키는 두 실수 $x$를 각각 $\alpha$, $\beta$ $(\alpha<\beta)$라 하자.
함수 $f(x)$와 직선 $y=mx+t$가
$x=\alpha$에서 접할 때, $t=f(\alpha)-m\alpha$이고
$x=\beta$에서 접할 때, $t=f(\beta)-m\beta$이다.




그래프를 통해 다음 다섯 가지 사실을 알 수 있다.
① $t < f(\alpha) - m\alpha$ 일 때, $g(t) = 1$ 이다.
② $t = f(\alpha) - m\alpha$ 일 때, $g(t) = 2$ 이다.
③ $f(\alpha) - m\alpha < t < f(\beta) - m\beta$ 일 때, $g(t) = 3$ 이다.
④ $t = f(\beta) - m\beta$ 일 때, $g(t) = 2$ 이다.
⑤ $t > f(\beta) - m\beta$ 일 때, $g(t) = 1$ 이다.



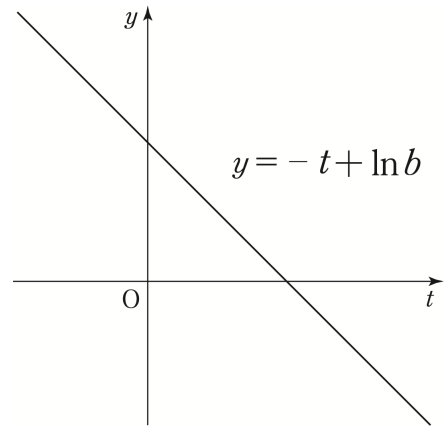

따라서 함수 $g(t)$ 의 그래프는 위와 같고 (나) 조건을 만족시킨다.

ⅴ) $m \le f'(a - \sqrt{b})$
곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = mx + t$ 의 교점은 $t$ 의 값에 관계없이 항상 하나이므로 방정식 $g(t) = c$ 가 실근이 존재하도록 하는 서로 다른 실수 $c$ 의 개수는 1 이다.
따라서 (나) 조건을 만족시키지 못한다.

따라서 $f'(a - \sqrt{b}) < m < f'(a + \sqrt{b})$ 일 때 (나) 조건을 만족시킨다.

함수 $f(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고
함수 $g(t)$ 는 불연속인 점이 존재한다.
함수 $f(t)g(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는
함수 $g(t)$ 가 불연속이 되는 실수 $t$ 에 대하여 $f(t) = 0$ 이어야 한다.
함수 $f(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 감소하므로 1 개의 실근을 갖는다.
따라서 함수 $g(t)$ 는 오직 하나의 불연속점을 가져야 한다.
$f'(a - \sqrt{b}) < m < -1$, $-1 < m < f'(a + \sqrt{b})$ 일 때
함수 $g(t)$ 는 2 개의 불연속점을 갖는다.
따라서 (다) 조건을 만족시킬 수 없다.
$m = -1$ 일 때 함수 $g(t)$ 는 하나의 불연속점을 갖는다.
따라서 $m = -1$ 이다.

$m = -1$ 일 때 함수 $g(t)$ 는 $t = \ln b$ 에서 불연속인 점을 갖는다.
따라서 $f(\ln b) = 0$ 이어야 한다.
$b \ge 1$ 이므로 $\ln b \ge 0$ 이고, 직선 $y = -t + \ln b$ 는 점 $(\ln b, 0)$ 을 지난다.




함수 $f(t)$ 는 직선 $y = -t + \ln b$ 와 $t = a$ 에서만 만나고
$(\ln b, 0)$ 을 지나야 하므로 $a = \ln b$ 이다.

따라서 함수 $f(x) = \ln\{(x - \ln b)^2 + b\} - x$ 이다.
$f(2) = a - 2$ 이므로
$\ln\{(2 - \ln b)^2 + b\} - 2 = \ln b - 2$ 에서
$b = e^2$ 임을 알 수 있다.
따라서 $e^{f(0)} = e^{\ln(e^2 + 4)} = e^2 + 4$ 이므로 $p = 1$, $q = 4$ 이다.
$\therefore\ p + q = 5$